Strahinja Gvozdić i Milica Šobot

Metod drugog momenta i slučajni grafovi. Zero-sum Remzijevi brojevi

Probabilistički metod je tehnika koja se u matematici koristi za dokazivanje postojanja nekih struktura sa određenim osobinama. Posmatraće se njegova primena u različitim oblastima matematike, uključujući kombinatoriku, teoriju grafova, Remzijevu teoriju, teoriju brojeva itd. Rad se bavi primenom metoda drugog momenta na probleme traženja funkcija praga određenih svojstava u klasičnom slučajnom grafu i u prostoru verovatnoće u kome na n *čvorova postavljamo trouglove na slučajan način. Dalje uvodimo pojam slučajne vektorske promenljive i primenjujemo njena svojstva u dokazu konkretnog problema. Na kraju, bavićemo se Zero-sum Remzijevom teorijom i predstavićemo dobijeno poboljšanje ocene iz korišćene literaure za zero-sum bipartitni Remzijev broj grafa* $K_{n,n}$.

Uvod

Probabilistički metod je nekonstruktivni metod koji nam omogućava dokazivanje postojanja struktura s određenim svojstvom bez znanja o tome kako se ta struktura može zaista pronaći. Prve primene metoda se vezuju za mađarskog matematičara Pala Erdeša (Erdős Pál, 1913-1996). Metod se zasniva na primeni nekoliko različitih ideja koje na primer uključuju dokazivanje da se struktura javlja s pozitivnom verovatnoćom, što nam daje da sigurno postoji neki kompleks uslova pod kojima se data sktruktura pojavljuje. Primena probabilističkog metoda je vrlo široka i obuhvata probleme iz različitih grana matematike, uključujući kombinatoriku, teoriju grafova i teoriju brojeva. U mnogim od tih problema probabilistički metod daje ocene koje značajno prevazilaze one dobijene primenama drugih, konstruktivnih metoda. Mi se u ovom radu zadržavamo pre svega na primeni u teoriji grafova i teoriji brojeva, a zainteresovani čitalac se može bolje upoznati sa metodom u knjizi Alona i Spensera (Alon i Spencer 2000), dok u beleškama predavanja profesora Matušeka i Vondraka (Matoušek i Vondrák 2008) može naći dodatne primere, kao i sažet pregled najkorisnijih tvrđenja i postupaka pri korišćenju probabilističkog metoda. Što se tiče upoznavanja sa osnovama teorije verovatnoće, upućujemo na beleške predavanja profesora Bercekasa i Ciciklisa (Bertsekas i Tsitsiklis 2000). Za detaljno upoznavanje sa teorijom slučajnih grafova i njihovom primenom, čitalac može koristiti knjigu Bele Bolobaša (Bollobás 1985). Kao osnovu za proučavanje zero-sum Remzijevih brojeva, dajemo dva rada Jaira Karoa (Caro 1992; 1996), kao i rad Eve Silađi i Branislava Šobota (2017).

Osnovni pojmovi i tvrđenja

Uvedimo prvo neke od osnovnih pojmova verovatnoće kojima ćemo se služiti u radu. Nećemo se zadržavati na aksiomatskom zasnivanju verovatnoće, već ćemo dati samo osnovne definicije i tvrđenja.

Polazni pojam u teoriji verovatnoće jeste skup elementarnih događaja, u oznaci Ω. Bilo koji podskup Ω se naziva događajem. Skup svih događaja koji mogu nastupiti kao ishod nekog ogleda se naziva poljem događaja, u oznaci $\mathcal{F}$.

Strahinja Gvozdić (2002), Beograd, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Milica Šobot (2002), Novi Sad, učenica 3. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu

MENTOR: Branislav Šobot, student Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Definicija 1 (σ-polje). Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω se naziva σ-poljem ako zadovoljava:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

2) ako $A \in \mathcal{F}$, onda $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

3) ako $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 2 (aksioma verovatnoće). Preslikavanje P: $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ se naziva verovatnoćom nad σ-poljem ako važi:

1) $P(\Omega) = 1$,

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) \geq 0$,

3) $A_i \cap A_j = \varnothing \Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,

za sve $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$.

Napomena: Umesto simbola unije događaja, koristićemo simbole +, odnosno Σ, ukoliko su ti događaji svi disjunktni.

Definicija 3. Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ u kojoj je Ω skup elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ-polje nad tim skupom i P je verovatnoća nad $\mathcal{F}$, naziva se prostorom verovatnoće.

Ove definicije nam omogućavaju da u odgovarajućem prostoru verovatnoće izvedemo osnovna tvrđenja, poput oblika uslova pod 3) u obe gornje definicije σ-polja i aksiome verovatnoće sa konačno mnogo sabiraka, te teoreme zbira:

$$P(A \cup B = P(A) + P(B) - P(AB),$$

gde sa AB označavamo presek skupova A i B.

Potrebno je prikazati i pojam uslovne verovatnoće, i s njom u vezi, nezavisnih događaja. Naime, verovatnoća događaja A pod uslovom ispunjenja događaja B, u oznaci $P(A|B)$, jeste količnik verovatnoće preseka događanja A i B i verovatnoće događanja B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Za događaj A kažemo da je nezavisan od događaja B ako je verovatnoća nastupanja A pod uslovom nastupanja B jednaka bezuslovnoj verovatnoći nastupanja A, tj. $P(A|B) = P(A)$. Iz definicije uslovne verovatnoće dobijamo da je tada $P(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, tj. $P(AB) = P(A)P(B)$, pa u slučaju nezavisnih događaja „verovatnoća prolazi kroz proizvod”.

Zakon totalne verovatnoće. Ako su $H_1, \ldots$ $\ldots, H_n$ disjunktni događaji čija je unija ceo skup Ω, i A neki događaj, važi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i).$$

Dolazimo do pojma (diskretne) slučajne promenljive, jednog od najvažnijih u daljem radu.

Definicija 4. Za zadati prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, diskretna slučajna promenljiva $X : \Omega \to$ $\to \mathbb{R}$ je preslikavanje iz skupa elementarnih događaja u skup realnih brojeva takvo da je$X(\Omega)$ prebrojiv skup i važi da je $X^{-1}(a) \in \mathcal{F}$ za svako realno a.

Pošto ćemo se u radu baviti samo diskretnim slučajem, slučajnu promenljivu X možemo prikazati na sledeći način:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

To znači da se neka vrednost x_i u slučajnoj promenljivoj X javlja s verovatnoćom p_i, tj. da je verovatnoća da nastupi neki od elementarnih događaja čija je vrednost u slučajnoj promenljivi x_i jednaka upravo p_i. Primetimo da su elementarni događaji diskjunktni i da se preslikavanje vrši iz celog skupa Ω. Zbog toga zbir verovatnoća javljanja svih mogućih vrednosti slučajne promenljive mora biti 1, odnosno $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Pojmovi koje ćemo sledeće definisati su takođe veoma važni i prožimaće se kroz ceo rad.

Definicija 5. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X u oznaci $E(X)$ je broj koji definišemo formulom $\sum_i x_i P(X = x_i)$, gde su x_i vrednosti iz kodomena slučajne promenljive.

Na primer, pri bacanju kockice, svi brojevi su jednako verovatni. Slučajna promenljiva koja svaki elementarni događaj, odnosno pad broja n na kockici, slika u taj broj n ima očekivanje:

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

(primećujemo da pritom broj 3.5 ne postoji na kockici).

Definicija 6. Zbir slučajnih promenljivih X i Y je slučajna promenljiva $X + Y$ koja uzima sve moguće vrednosti zbira neke dve vrednosti x i y promenljivih X i Y, sa verovatnoćom preseka događaja da X uzima vrednost x i da Y uzima vrednost y. Proizvod slučajnih promenljivih X i Y je slučajna promenljiva XY koja uzima sve moguće vrednosti proizvoda neke dve vrednosti x i y

promenljivih X i Y, sa verovatnoćom preseka događaja da X uzima x i da Y uzima y.

Matematičko očekivanje ima mnoga korisna svojstva, koja navodimo bez dokaza:

1) Ako je c konstanta, $E(cX) = cE(X)$.

2) Ako je $X \leq Y$, $E(X) \leq E(Y)$.

3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ (zbir slučajnih promenljivih X i Y je slučajna promenljiva $X+Y$ koja uzima sve moguće vrednosti zbira neke dve vrednosti x i y promenljivih X i Y, sa verovatnoćom preseka događaja da X uzima vrednost x i da Y uzima vrednost y).

4) Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, $E(XY) = E(X)E(Y)$ (proizvod slučajnih promenljivih se definiše slično kao zbir).

Zadržaćemo se posebno na svojstvu pod 3). Njegova moć se krije u tome što važi nevezano od toga da li su promenljive zavisne ili nezavisne. Zbog toga se problem traženja vrednosti očekivanja neke promenljive može razložiti na traženje očekivanja njenih sabiraka, koji su često istovetni, i dakle imaju jednaka očekivanja.

Od velikog značaja će biti takozvane indikatorske slučajne promenljive nekog događaja A, u oznaci I_A. One uzimaju vrednost jedan ako je događaj ispunjen, inače nula. Njihovo očekivanje je prema tome jednako verovatnoći nastupanja događaja A.

Sada ćemo dokazati takozvanu Markovljevu nejednakost.

Teorema 7. Za sve slučajne promenljive koje uzimaju isključivo nenegativne vrednosti važi:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Dokaz. Primetimo da važi $aI_{X \geq a} \leq X$ jer kada je $X < a$, indikatorska promenljiva ima vrednost nula, a X je nenegativno, dakle veće ili jednako nuli; inače je leva strana nejednakosti jednaka a, a desna X, što je opet veće ili jednako a u ovom slučaju. Uzmimo očekivanja obe strane. Po svojstvu 2) matematičkog očekivanja, nejednakost važi i između očekivanja leve i desne strane, dakle: $aP(X \geq a) = aE(I_{X \geq a}) = E(aI_{X \geq a}) \leq E(X)$, odakle neposredno sledi Markovljeva nejednakost. □

Definicija 8. Matematičko očekivanje slučajne promenljive $(X - E(X))^k$ nazivamo centralni moment reda k slučajne promenljive X u oznaci $\mu_k(X)$. Dakle, $\mu_k(X) \leq E\left((X - E(X))^k\right)$.

Definicija 9. Disperzija ili varijansa je centralni moment drugog reda slučajne promenljive X, a vrednost kvadratnog korena disperzije nazivamo standardnom devijacijom. Disperziju označavamo sa $\mathrm{Var}(X)$, a standardnu devijaciju sa $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Ispostavlja se da se varijansa može računati i po sledećoj formuli:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Varijansa nam zapravo služi da izrazimo odstupanje vrednosti slučajne promenljive od njene očekivane vrednosti. Na primer, slučajne promenljive:

$$X \sim \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0.1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -100 & 0 & 100 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

imaju ista očekivanja (nula), ali je jasno da vrednosti Y odstupaju od nule daleko više nego vrednosti X. Upravo zbog toga se uvodi pojam varijanse. Iako na prvi pogled izgleda logičnije definisati varijansu kao $E(|X - E(X)|)$, odnosno kao očekivanje apsolutne vrednosti odstupanja, upravo zbog svojstva koje ona treba da prikazuje, to nije slučaj iz tog razloga što apsolutne vrednosti nisu zgodne za računanje i ne pružaju nam svojstva koja ima ovako definisana varijansa (c je konstanta):

1) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$

2) $\mathrm{Var}(c) = 0$

3) $\mathrm{Var}(cX) = c^2 \mathrm{Var}(X)$

4) $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$

5) Ako su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_n$ po parovima nezavisne:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

Definicija 10. Kovarijansom dve slučajne promenljive X i Y, u oznaci $\mathrm{Cov}(X, Y)$, nazivamo razliku očekivanja promenljive XY i proizvoda očekivanja X i Y, odnosno:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = (Y, X) = \mathrm{Cov}\, E(X, Y) - E(X)E(Y).$$

Ako su X i Y nezavisne, jasno je da je njihova kovarijansa jednaka nuli.

Teorema 11. Ako je slučajna promenljiva X zbir slučajnih promenljivih $X_1, \ldots, X_n$, onda imamo:

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\sim j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j),$$

gde $i\sim j$ označava da su X_i i X_j zavisne (inače je kovarijansa nula).

Dokaz.

$$\mathrm{Var}\,(X)=E(X^2)-(E(X))^2=$$

$$=E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+\sum_{i,j}E(X_i,X_j)-\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-$$

$$-\sum_{i,j}E(X_i)E(X_j)=\sum_{i=1}^{n}\left(E(X_i^2)-E(X_i)^2\right)+$$

$$+\sum_{i,j}\left(E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i\sim j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

Dalje slede tvrđenja na kojima se zasniva primena metoda drugog momenta i njegov opis. Više o zasnivanju verovatnoće se može naći u literaturi (Bertsekas i Tsitsiklis 2000).

Teorema 12 (nejednakost Čebiševa). Za sve nenegativne slučajne promenljive i realne a važi:

$$P(X\geq a)\leq\frac{E(X^2)}{a^2}.$$

Dokaz. Primetimo sledeće: $X\geq a\Rightarrow X^2\geq a^2$, jer je X nenegativno. Dakle, iz Markovljeve nejednakosti:

$$P(X\geq a)=P(X^2\geq a^2)\leq\frac{E(X^2)}{a^2}.$$

Primena Čebiševljeve nejednakosti se naziva metod drugog momenta. Zapravo je uobičajenija sledeća direktna posledica ove nejednakosti:

Posledica 13. $P(|E(X)-X|\geq a)\leq\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$

Posledica 14.

$$P(X=0)\leq P(|E(X)-X|\geq E(X))\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)^2}.$$

Pre nego što damo ostale posledice, potrebno je da uvedemo pojam o-notacije, odnosno Bahman-Landau notacije. Pisaćemo $f(n)=O(g(n))$ ako je f asimptotski ograničen odozgo sa g, odnosno ako važi $(\exists k>0)(\exists n_0)(\forall n>n_0|f(n\leq g(n))$. Slično uvodimo $f(n)=\Theta(g(n))$ kao oznaku da je f asimptotski ograničen i odozdo i odozgo sa g, $f(n)=o(g(n))$ kao oznaku da je f asimptotski manje od g (u gornjem uslovu je umesto manje ili jednako strogo manje), i $f(n)=\omega(g(n))$ kao oznaku da je f asimptotski veći od g.

Posledica 15. Ako je $(X)=o(E(X)^2)$, onda je za $E(X)\to\infty$, $P(X=0)\to 0$.

Ako se X može zapisati kao zbir nezavisnih indikatorskih promenljivih $X_1,\ldots,X_n$, imamo:

$$(X_i)=p(1-p)\leq p=E(X_i),$$

gde je $E(X_i)=p$, odakle je:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)\leq\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=E(X).$$

Takođe:

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)\leq$$

$$\leq E(X_iX_j)=P(X_i=1\wedge X_j=1)=P(A_j\cap A_j),$$

gde su A_i i A_j događaji koji odgovaraju indikatorima X_i i X_j redom. Označimo $\sum_{i\sim j}P(A_i\cap A_j)$ sa $\Delta(A_1,\ldots,A_n)$.

Posledica 16. Ako je $\Delta(A_1,\ldots,A_n)=o(E(X)^2)$ i $E(X)\to\infty$, onda je $X>0$ gotovo uvek.

Dokaz.

$$P(X=0)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)^2}\leq\frac{E(X)+\Delta(A_1,\ldots,A_n)}{E(X)^2}.$$

Prvi sabirak brojioca razlomka sa desne strane je mnogo manji od imenioca, kao i drugi sabirak, prema uslovu, pa i ceo razlomak mora biti mnogo manji od 1, tj. za $E(X)\to\infty$, X je 0 gotovo nikad. □

Dalje imamo, $P(A_iA_j)=P(A_i|A_j)P(A_j)$. Ako uzmemo da su $A_1,\ldots,A_n$ simetrični događaji (tj. da za bilo koja dva i i j postoji preslikavanje prostora verovatnoće u samog sebe koje čuva verovatnoću i šalje A_i u A_j), imamo:

$$\Delta(A_1,\ldots,A_n)=\sum_{i\sim j}P(A_i|A_j)P(A_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)\sum_{i\sim j}P(A_i|A_j).$$

Primetimo da je $\sum_{i\sim j}P(A_i|A_j)$ nezavisno od izbora j, zbog simetričnosti $A_1,\ldots,A_n$, i označimo tu sumu sa $\Delta^*(A_1,\ldots,A_n)$ onda kada postoji. Sada:

$$\Delta(A_1,\ldots,A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\Delta^*(A_1,\ldots,A_n) =$$

$$= \Delta^*(A_1,\ldots,A_n)\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\Delta^*(A_1,\ldots,A_n)\sum_{i=1}^{n} P(A_i) =$$

$$\Delta^*(A_1,\ldots,A_n)E(X).$$

Dakle:

Posledica 17. Ako je $\Delta^*(A_1,\ldots,A_n) = o(E(X))$ i $E(X) \to \infty$, onda je $X > 0$ gotovo uvek.

Dokaz.

$$\mathrm{Var}(X) \le E(X) + \Delta(A_1,\ldots,A_n) =$$

$$= E(X) + E(X)\Delta^*(A_1,\ldots,A_n) = E(X)o(E(X)) =$$

$$= o(E(X)^2),$$

što sledi iz posledice 16.

Slučajni grafovi

Definicija 18. Slučajnim grafom $G(n, p)$ sa n čvorova nazivamo prostor verovatnoće u kome svaka grana postoji nezavisno od ostalih sa verovatnoćom p.

U ovako definisanom prostoru verovatnoće interesuju nas verovatnoće da graf ima neko svojstvo, npr. da sadrži ciklus dužine tri. Formalno, svojstvom $\mathcal{A}$ grafa nazivamo bilo koju familiju grafova zatvorenu za izomorfizme. Kažemo da graf ima svojstvo A ako pripada familiji $\mathcal{A}$.

Definicija 19. Svojstvo A je monotono ako za svaki graf u familiji $\mathcal{A}$, svi njegovi nadgrafovi (odnosno svi grafovi koji sadrže njegovu kopiju kao podgraf) pripadaju familiji $\mathcal{A}$.

Definicija 20. Preslikavanje $f : A \to B$ je monotono rastuće ako su na A i B definisane relacije poretka $\le_A$ i $\le_B$, redom, i važi:

$$(\forall x, y \in A)\,(x \le_A y \Rightarrow f(x) \le_B f(y)).$$

Preslikavanje $f : A \to B$ je monotono opadajuće ako su na A i B definisane relacije poretka $\le_A$ i $\le_B$, redom, i važi:

$$(\forall x, y \in A)\,(x \le_A y \Rightarrow f(y) \le_B f(x)).$$

Kažemo da je f monotona ako je monotono rastuća ili monotono opadajuća.

Posmatrajući neki graf H i svojstvo da $G(n, p)$ sadrži H kao svoj podgraf (što zapravo znači da familiji $\mathcal{A}$ iz prethodnih definicija pripadaju svi grafovi nad n čvorova sa H kao podgrafom), vidimo da je to svojstvo monotono po definiciji. Mi ćemo se zapravo u ovom delu rada i baviti svojstvima tipa $G(n, p)$ sadrži H kao podgraf. Za to nam je bitna veza između monotonosti svojstva i monotonosti verovatnoće pojavljivanja tog svojstva, koju navodimo u nastavku.

Lema 21. Označimo sa $P(G(n, p) \in \mathcal{A}$ verovatnoću da slučajan graf iz prostora $G(n, p)$ ima svojstvo $\mathcal{A}$. Tada je $P(G(n, p))$ monotona u funkciji od $p \in [0, 1]$.

Dokaz. Ako je $p > q$, za slučajan graf $G(n, q)$ možemo uvek uzeti neki slučajan graf $G(n, r)$ takav da je $G(n, q) \cup G(n, r)$ ekvivalentan $G(n, p)$ (tj. možemo naći prostor verovatnoće $G(n, r)$ takav da njegova unija sa $G(n, q)$ daje prostor verovatnoće u kome grane postoje sa izabranom verovatnoćom p, za r koje zadovoljava $p = q + (1 - q)r$. Zbog monotonosti A je onda:

$$P(G(n, q) \in \mathcal{A}) \le P((G(n, q) \cup G(n, r)) \in \mathcal{A}) =$$

$$= P(G(n, p)) \in \mathcal{A}),$$

što nam je i trebalo. □

Dakle, ako posmatramo krajnje vrednosti p za monotono svojstvo A, npr. postojanje ciklusa dužine četiri, imamo da za $p = 1$ mora postojati ciklus (jer tada sigurno imamo sve grane), dok za $p = 0$ ne može postojati. Zbog monotonosti, moguće je da će postojati neka središnja vrednost r, takva da će se za sve $p \gg r$ (odnosno $p = \omega(r)$ dato svojstvo pojavljivati gotovo uvek, dok se za sve $p \ll r$ neće pojavljivati gotovo nikad. Ako za dovoljno veliko n ta središnja vrednost postoji, nazivamo je funkcijom praga. Dajemo sada i formalnu definiciju:

Definicija 22. $r(n)$ nazivamo funkcijom praga svojstva $\mathcal{A}$ ako važi sledeće:

(1) $p \ll r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(G(n, p) \in \mathcal{A}) = 0$,

(2) $p \gg r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(G(n, p) \in \mathcal{A}) = 1$.

U traženju funkcije praga monotonih svojstava, jedno od glavnih pomoćnih tvrđenja je Čebiševljeva nejednakost, odnosno primena metoda drugog momenta. Pored nje, često se koristi i ocena koju sada navodimo.

Lema 23. Za nenegativnu celobrojnu slučajnu promenljivu X važi:

$$P(X>0)\le E(X).$$

Dokaz. Direktno iz Markovljeve nejednakosti i činjenice da je:

$$P(X>0)=P(X\ge 1). \qquad \square$$

Teorema 24. Funkcija praga svojstva da $G(n,p)$ sadrži podgraf K_4 je $n^{-\frac{2}{3}}$.

Dokaz. Označimo sa X događaj da $G(n,p)$ sadrži K_4 za podgraf. Četiri čvora biramo na $\binom{n}{4}$ načina i imamo da je verovatnoća da sve grane između tih čvorova postoje p^6. Imamo nejednakost $P(X>0)\le E(X)$, što je ustvari:

$$\sum_{i=1}^{\binom{n}{4}} p^6=\binom{n}{4}p^6\sim n^4p^6.$$

Želimo da za $p\ll r(n)$, očekivanje bude $o(1)$, odnosno da teži nuli za veliko n, i dobijamo funkciju praga:

$$r(n)=p=\sqrt[6]{\frac{1}{n^4}}=n^{-\frac{2}{3}}.$$

Sada koristimo direktnu posledicu nejednakosti Čebiševa $P(X=0)\le\frac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)^2}$ i računamo varijansu:

$$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}\left(X_1+X_2+\ldots+X_{\binom{n}{4}}\right)=$$

$$E\left(\left(X_1+X_2+\ldots+X_{\binom{n}{4}}\right)^2\right)-$$

$$-E\left(X_1+X_2+\ldots+X_{\binom{n}{4}}\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{\binom{n}{4}}\left(E(X_i^2)-E(X_i)^2\right)+$$

$$+2\sum_{1\le i<j\le\binom{n}{4}}\left(E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)\right)=$$

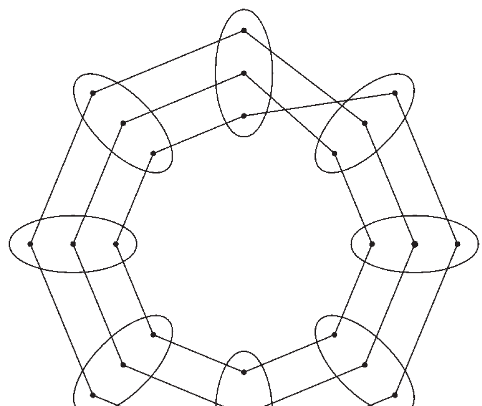
$$=\binom{n}{4}(p^6-p^{12})+\binom{n}{4}(n-4)(n-5)\binom{4}{2}(p^{11}-p^{12})+$$

$$+\binom{n}{4}(n-4)(p^9-p^{12}).$$

Za poslednju od ovih suma smo razmatrali samo slučajeve da A_i i A_j imaju 2, odnosno 3 zajednička čvora, jer u slučajevima kada su oni nezavisni znamo da važi $E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)$. Kada izuzmemo sve konstante, dobijeni izraz se ponaša kao $n^4p^6+n^6p^{11}+n^5p^9\sim o(E(X)^2)$ što znači da će prethodno pomenuta verovatnoća $P(X=0)$ biti u $o(1)$, odnosno kada $E(X)\to\infty$, što je i slučaj zbog $p\ll n^{-\frac{2}{3}}$, težiće nuli, i dakle gotovo uvek je $X>0$. $\square$

Definicija 25. $pG(n,k,p)$ je prostor verovatnoće na k-partitnom grafu sa po $\frac{n}{k}$ čvorova u svakoj particiji, koje su kružno sortirane tako da se grane između susednih particija postavljaju sa verovatnoćom p, dok ostale grane ne postoje.

Teorema 26. Svojstvo da $pG(n,k,p)$ sadrži ciklus dužine $l\cdot k$ koji prolazi kroz svih k particija po tačno l puta, ima funkciju praga $\frac{1}{n}$.



Slika 1. Primer za n = 24, k = 8, l = 3

Figure 1. The example for n = 24, k = 8, l = 3

Dokaz. Verovatnoća da postoji ciklus u nekom rasporedu $k \cdot l$ čvorova jeste p^{kl}. Ovakvih rasporeda ima (prvi razlomak predstavlja broj rasporeda k particija u ciklusu, deli se sa k, jer nije bitan početni čvor, već samo raspored; drugi razlomak je broj načina da se izabere redosled nekih l brojeva iz particije, dignuto na broj particija). Prema tome, ako je X slučajna promenljiva čija je vrednost broj ovakvih ciklusa u slučajnom grafu, njeno očekivanje je:

$$E(X) = (k-1)! \left(\frac{\frac{n}{k}!}{\left(\frac{n}{k} - l\right)!} \right) p^{kl} = \Theta(n^{kl} p^{kl}).$$

Uzmimo $r(n) = \frac{1}{n}$ i pokažimo da je ona funkcija praga ovog svojstva. Ako je $p \ll r(n)$, onda je $E(X) = o\left(n^{kl} \left(\frac{1}{n}\right)^{kl} \right) = o(1)$, pa je po nejednakosti $P(X > 0) \le E(X)$, $P(X > 0) = o(1)$, odnosno za $n \to \infty$ je $X > 0$ gotovo nikad, odnosno $X = 0$ gotovo uvek, što je i trebalo pokazati. Neka je sada $p \gg r(n)$. Posmatrajmo Δ^* iz posledice 17, gde su nam događaji ti da za fiksiran raspored kl čvorova vazi da oni indukuju ciklus u tom rasporedu. Dva događaja ovog tipa su zavisna ako imaju bar dva zajednička čvora u odgovarajućim rasporedima. Recimo da neka dva od ovih ciklusa imaju i zajedničkih čvorova. Oni tada imaju najviše $i-1$ zajedničku granu (jer uklanjanjem grana sa ciklusa ostaje šuma na i čvorova, koja ima najviše $i-1$ granu), odnosno ako jedan ovaj ciklus fiksiramo, ovaj drugi ima bar još $kl - i + 1$ granu koja treba da se nađe u slučajnom grafu. Označimo događaje postojanja ova dva ciklusa sa A_1 i A_2. Tada je $P(A_2 | A_1) \le p^{kl-i+1}$. Za fiksirani jedan ciklus, ciklusa koji sa njim imaju i zajedničkih čvorova postoji:

$$\binom{kl}{i} \frac{k!}{k} (i_1!\, i_2! \ldots i_k!) \big((l-i_1)! \ldots (l-i_k)!\big) \times$$

$$\times \left(\binom{\frac{n}{k}}{l-i_1} \cdots \binom{\frac{n}{k}}{l-i_k} \right) \left(\binom{l}{i_1} \cdots \binom{l}{i_k} \right),$$

gde su $i_1 \ldots i_k$ brojevi zajedničkih čvorova u svakoj od particija, dakle $i_1 + \ldots + i_k = i$. Imamo da je onda ukupno učešće u Δ^* onih parova ciklusa sa i zajedničkih čvorova:

$$\sim p^{kl-i+1}\, n^{kl-(i_1+\ldots+i_k)} = o(n^{kl} p^{kl}).$$

Pošto i uzima konstantan broj vrednosti, imamo da je i $\Delta^* = o(n^{kl} p^{kl})$, pa je za $p \gg r(n)$ i $n \to \infty$, $E(X) = \omega\left(n^{kl} \left(\frac{1}{n}\right)^{kl} \right) = \omega(1)$, odnosno $E(X) \to \infty$, prema posledici 17, $X > 0$ gotovo uvek, što se i tvrdilo. Ovime je dovršen dokaz teoreme. □

Opisaćemo metod poynat kao Černofovo ograničenje (eng. Chernoff bound).

Teorema 27. Neka je X slučajna promenljiva koja se može predstaviti kao suma nezavisnih indikatorskih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ verovatnoće $p = \omega\left(\frac{1}{n}\right)$, i neka je a realna konstanta. Tada je:

$$P(X \le a) \le \left(\frac{np}{a}\right)^a e^{a-np}.$$

Dokaz. Prema Markovljevoj nejednakosti je za svako $t > 0$:

$$P(X \le a) = P(e^{-tX} \ge e^{-ta}) \le \frac{E(e^{-tX})}{e^{-ta}} =$$

$$= \frac{E(e^{-t(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)})}{e^{-ta}} = \frac{E(e^{-tX_1} \ldots e^{-tX_n})}{e^{-ta}} =$$

$$= e^{ta} \prod_{i=1}^{n} E(e^{-tX_i}).$$

Dalje primetimo da je:

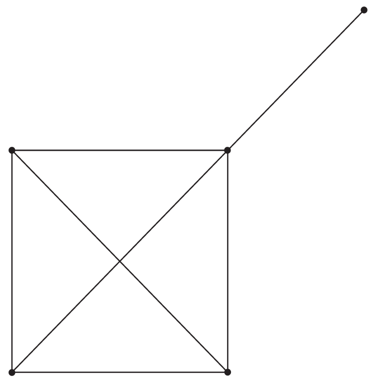
$$E(e^{-tX_i}) = (1-p) + pe^{-t} = 1 + p(e^{-t} - 1) \le e^{p(e^{-t}-1)}$$

prema poznatoj aproksimaciji. Zamena $t = \ln \frac{np}{a}$, daje $E(e^{-tX_i}) \le e^{p\left(\frac{a}{np} - 1\right)}$.

$$P(X \le a) \le \left(\frac{np}{a}\right)^a e^{a-np} = \Theta\big((np)^a e^{-np}\big) = o(1)$$

pa ako je $p = \omega\left(\frac{1}{n}\right)$, $np \to \infty$ i $t = \ln \frac{np}{a}$, tada i $P(x \le a) \to 0$. Dakle, za p koje je dovoljno veliko imamo da X uzima vrednosti manje od konstante skoro uvek. □

Primer 28. Funkcija praga svojstva da slučajan graf $G(n, p)$ sadrži graf sa slike 2 kao podgraf je $n^{-\frac{2}{3}}$.



Slika 2. K_4 sa kukom

Figure 2. K_4 with a hook

Uzmimo prvo $p \ll r$. Prema teoremi 24, verovatnoća postojanja K_4 kao podgrafa $G(n, p)$ teži nuli kada n teži beskonačno, a pošto graf sa slike sadrži upravo K_4 kao svoj podgraf, verovatnoća njegovog postojanja u $G(n, p)$ je takođe blizu nule. Time ostaje da proverimo šta se dešava za $p \gg n^{-\frac{2}{3}}$. Opet, prema teoremi 24, K_4 postoji u $G(n, p)$ skoro uvek. Uočimo sada neki čvor tog K_4, i posmatrajmo njegov stepen kao vrednost slučajne promenljive X, predstavljene kao zbir indikatorskih promenljivih za postojanje neke od grana koje polaze iz tog čvora. Broj tih promenljivih je $n-1$, dok je verovatnoća svake p. Pošto je $p \gg n^{-\frac{2}{3}} = \omega\left(\frac{1}{n}\right)$, prema gore razmotrenoj metodi Černofovog ograničenja je $P(X \leq 10)$ skoro sigurno nula, odnosno svaki čvor skoro uvek ima više od 10 grana, pa i izabrani skoro uvek ima još neku granu van posmatranog K_4. Presek dva događaja koji nastupaju gotovo sigurno, i sam nastupa gotovo sigurno, pa je funkcija praga ovog svojstva zaista $n^{-\frac{2}{3}}$. □

Primetimo da je u prethodnom primeru očekivanje broja grafova sa slike u $G(n, p)$ zapravo $E(X) = \binom{n}{p} p^7 \sim n^5 p^7$, tako da bismo iz dokaza teorema 26 i 27 mogli očekivati da vrednost funkcije praga bude $n^{-\frac{5}{7}}$ (manje u odnosu na dobijenu), ipak oponašanjem prethodnih dokaza bi se pokazalo da to nije tačno. S druge strane, ovde uočavamo još jednu zanimljivu pojavu, a to je da je za p između $n^{-\frac{5}{7}}$ i $n^{-\frac{2}{3}}$ verovatnoća pojavljivanja grafa sa slike u $G(n, p)$ skoro nula, dok je istovremeno očekivani broj tih grafova beskonačan.

Definicija 29. Automorfizam grafa $G(V, E)$ je bilo koje injektivno preslikavanje $f: V \to V$ takvo da važi $(u, v) \in E \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E$.

Teorema 30. Neka je H graf nad v čvorova sa e grana i a automorfizama. Tada za sve konstantne $p \in [0,1]$, slučajan graf $G(n, p)$ gotovo uvek sadrži $(1+o(1))p^e(1-p)^{\binom{v}{2}-e}\frac{n^v}{a}$ indukovanih kopija H (indukovanom kopijom H u G nazivamo podgraf G za koji između neka dva čvora postoji grana ako i samo ako ona postoji između odgovarajuća dva čvora u H).

Dokaz. Neka je X slučajna promenljiva čija je vrednost broj indukovanih kopija H u $G(n, p)$. Tada je $E(X) = \Theta\left(p^e(1-p)^{\binom{v}{2}-e}\frac{n^v}{a}\right)$, jer svaki od $\Theta(n^v)$ čvorova može imati samo i isključivo grane H (ako učestvuje u vrednosti X), i takođe je potrebno podeliti sa a, jer tačno toliko različitih redosleda v čvorova zapravo daju isti H, zbog automorfizama. Nađimo sada varijansu X. Imamo:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \sim j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j),$$

gde su X_i indikatori postojanja indukovane kopije H u nekom v-skupu. Njih ima $\Theta(n^v)$, zbog automorfizama. Tada je prema već izvršenom razmatranju gore, $\sum_i X_i \leq E(X)$. Opet, slično kao i tada, posmatrajmo $\sum_{i \sim j} P(A_i \wedge A_j)$. Imamo $P(A_i|A_j) = p^{e-d}$, gde je d broj zajedničkih grana grafova u događajima A_i i A_j, pa pošto je p konstantno, i ova verovatnoća je konstantna. Ako zajedničkih čvorova ova dva grafa ima t, učešće u Δ^* takvih i jeste n^{v-t} puta neka konstanta, dakle $\Delta^* = O(n^{v-2})$. Odatle imamo:

$$(X) = O(E(X)) + E(X)\,O(n^{v-2}) = O(n^{2v-2}).$$

Neka je, sada, $f(n)$ preslikavanje koje zadovoljava $f(n) = o(E(X)) = o(n^v)$ i $f(n) = \omega(n^{v-1})$. Onda je po nejednakosti Čebiševa:

$$P(|X - E(X)| \geq f(n)) \leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{f(n)^2} = \frac{O(n^{2v-2})}{\omega(n^{2v-2})} = o(1),$$

dakle gotovo nula za $E(X) \to \infty$, tj. $|X - E(X)| \leq$ $\leq o(E(X))$ skoro uvek, a prema tome i:

$$X - E(X) \leq o(E(X)).$$

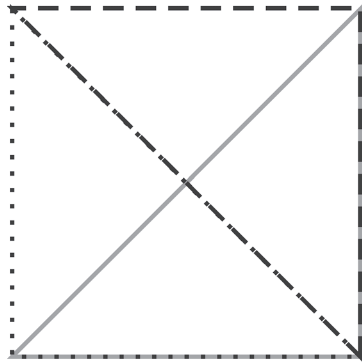
To nam konačno daje ono što je i trebalo dokazati, $X = (1 + o(1))E(X)$ skoro uvek. □

Sada ćemo razmotriti nešto drugačiju ideju. Naime, umesto grana, biraćemo trouglove (K_3) nad n čvorova sa nekom verovatnoćom p. Obeležavaćemo ovaj prostor verovatnoće sa $G_3(n, p)$.

Teorema 31. Svojstvo da slučajan graf $G_3(n, p)$ sadrži K_4 kao podgraf ima funkciju praga $n^{-\frac{7}{4}}$.

Dokaz. Dokaz će se zasnivati na sledećoj ideji: posmatraćemo različite načine na koje trouglovi mogu graditi K_4, i uzeti onaj sa najmanjom funkcijom praga. To će ujedno biti i funkcija praga traženog svojstva: ako uzmemo p koje je mnogo manje od istog, pošto će tada ujedno biti mnogo manje od ostalih funkcija praga, K_4 će se na bilo koji od načina javljati sa malom verovatnoćom, dakle i sveukupno će se javljati skoro nikad. S druge strane, za $p \gg n^{-\frac{7}{4}}$, će se K_4 dobijen na izabrani način pojavljivati sa visokom verovatnoćom, dakle i K_4 uopšte će se pojavljivati skoro uvek.

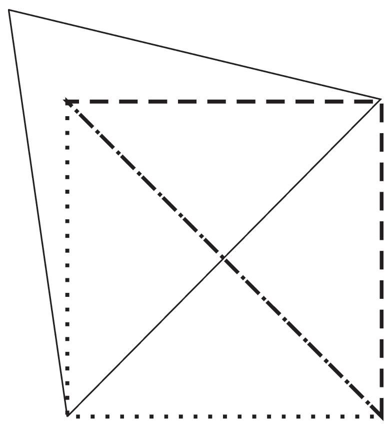
Razdvojićemo načine na koje trouglovi izgrađuju K_4 prema tome koliko se trouglova nalazi u samom K_4 (slike 3–7), tj. koliko njih ima sve grane u K_4. (Primetimo da svaki trougao ima nula, jednu ili tri grane u K_4, odnosno tačno dve ne može imati, jer bi u tom slučaju imao i treću.) Ako su svi trouglovi u K_4, dobijamo ga sa tačno tri trougla (slika 3). Očekivani broj ovakvih K_4 je onda $\Theta(n^4 p^3)$, jer biramo četiri čvora za ovu konfiguraciju, i na njih postavljamo tri trougla. Da bismo za p mnogo manje od funkcije praga mogli da primenimo ovog načina rasporeda trouglova bi bio $p^{-\frac{4}{3}}$ (ovim se misli da je p funkcija praga postojanja tačno ovakve



Slika 3. Svi trouglovi u K_4

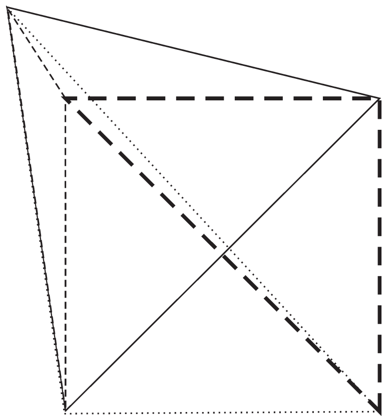
Figure 3. All the triangles within K_4

konfiguracije; kada bi se u ostalim slučajevima na sličan način dobile vrednosti veće od ove, uzeli bismo p za funkciju praga postojanja K_4 uopšte; pokazuje se, pak, da se u nekom od preostalih slučajeva dostiže manja vrednost za p). Ako su dva trougla u K_4, oni pokrivaju tačno pet grana, dok šesta mora biti pokrivena nekim trećim trouglom, sa temenom van K_4 (slika 4). Očekivanje je onda $\Theta(n^5 p^3)$, i funkcija praga bi bila $p = n^{-\frac{5}{3}}$. Ako je u K_4 samo jedan trougao, pokrivene su tačno tri grane, dok druge tri mo-



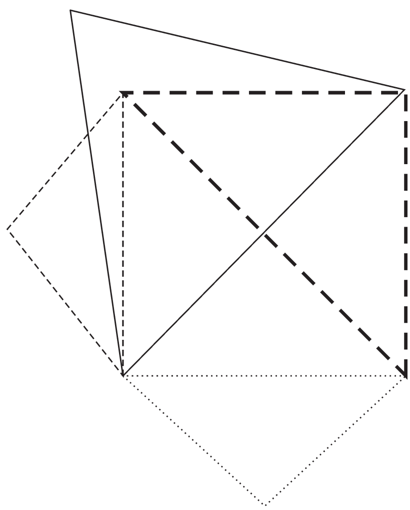
Slika 4. Dva trougla u K_4 i jedan sa temenom van njega

Figure 4. Two triangles within K_4 and the third one with a vertex outside K_4



Slika 5. jedan trugao u K_4 i tri trougla sa zajedničkim temenom van njega

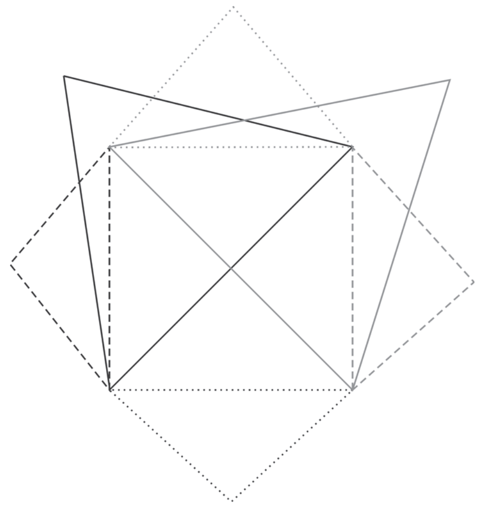
Figure 5. A triangle within K_4 and three triangles with a common vertex outside K_4



Slika 6. Jedan trougao u K_4 i tri trougla sa odvojenim temenima van njega

Figure 6. A triangle within K_4 and three triangles with distinct vertices outside K_4

raju biti pokrivene sa još tačno tri trougla sa jednim temenom van K_4. To teme im može svima biti zajedničko (slika 5), ili svima različito (slika 6), ali pošto se najmanja funkcija praga dobija za najveći broj tih spoljnih čvorova, razmotrićemo upravo taj sa najvećim stepenom n u očekivanju, $\Theta(n^7p^4)$, i funkcijom praga $p = n^{-\frac{7}{4}}$. Konačno, ako u K_4 ne biramo niti jedan trougao, svih šest grana istog moramo uzeti iz spoljnih trouglova, sa najviše šest spoljnih čvorova, dakle očekivanjem $\Theta(n^{10}p^6)$, i funkcijom praga $p = n^{-\frac{5}{3}}$ (slika 7). Ispostavlja se da je najmanja potencijalna funkcija praga ona u trećem slučaju, sa jednim trouglom u K_4 i još tri sa strane.



Slika 7. Svi trouglovi sa različitim čvorovima van K_4

Figure 7. All the triangles with distinct verices outside K_4

Dokažimo sada da je to zaista funkcija praga. Neka su X_s indikatori postojanja traženih konfiguracija trouglova na s-toj uređenoj sedmorci čvorova, i neka je X suma tih indikatorskih promenljivih, po svim s. X je, dakle, broj ovakvih konfiguracija u celom $G_3(n, p)$. Ako je $p \ll n^{-\frac{7}{4}}$, jasno je očekivanje $o(1)$, a kako je $P(X > 0) \leq$ $\leq E(X)$ skoro uvek je $X = 0$, za $n \to \infty$. Ako je $p \gg n^{-\frac{7}{4}}$, primetimo da su dve ove tražene strukture zavisne isključivo kada imaju bar jedan zajednički trougao (odnosno ako imaju samo zajednička dva čvora, nisu zavisni, jer sada biramo trouglove, ne grane). Posmatrajmo, dakle, Δ^*. Fiksirajmo neki ovakav izbor trouglova. Neki drugi mora imati bar tri zajednička čvora da bi bili zavisni. Ako i ima tri, mogu imati najviše jedan zajednički trougao, pa je uslovna verovatnoća iz Δ^* najviše p^3 (preostaju da se odaberu barem tri trougla), a kako slučaj nastupa $\Theta(n^4)$ puta, doprinos Δ^* je $\Theta(n^4p^3)$. Kada su četiri čvora zajednička, i dalje imamo najviše jedan zajednički trougao, jer nikoja dva trougla u razmatranoj strukturi nemaju zajedničku granu, dakle za dva trougla je potrebno bar pet čvorova. To daje da je uslovna verovatnoća najviše p^3, i javlja se $\Theta(n^3)$ puta, i doprinos Δ^* je $\Theta(n^3p^3)$. Sa pet zajedničkih čvorova imamo najviše dva zajednička trougla, i slično kao gore, doprinos $\Theta(n^2p^2)$. Konačno, sa šest zajedničkih čvorova je doprinos $\Theta(np)$. Kada je $p \gg n^{-\frac{7}{4}}$, dobijamo $\Delta^* = o(E(X))$ i $E(X) \to \infty$, pa je prema posledici 17 verovatnoća za $X = 0$ gotovo nula, odnosno $G_3(n, p)$ sadrži K_4 skoro uvek. □

Teorema 32. Za svako $k \geq 5$, svojstvo da slučajan graf $G_3(n, p)$ sadrži K_k kao podgraf ima funkciju praga $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$.

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme, razdvojićemo načine na koje se u $G_3(n, p)$ može javiti K_k prema broju trouglova kojima su sve grane unutar samog K_k. Iako ćemo na svim slikama prikazivati K_5, to činimo isključivo zbog jednostavnosti, i tako da se sve sa njih može proširiti i na K_k, za proizvoljno k.

Razmotrimo prvo slučaj kada se nijedan od trouglova ne nalazi potpuno u K_k, tj. kada je za svaku granu potreban neki trougao sa spoljnim čvorom. Slično kao u gornjem dokazu, najmanju funkciju praga dostižemo za najveći broj tih spoljnih čvorova. Tada biramo k čvorova za K_k i još $\binom{k}{2}$, po jedan za svaku od grana, dok trouglova imamo koliko i grana, pa je očekivanje u ovom slučaju:

$$\Theta\left(n^{k+\binom{k}{2}}p^{\binom{k}{2}}\right) = \Theta\left(n^{\binom{k+1}{2}}p^{\binom{k}{2}}\right),$$

sa odgovarajućom funkcijom praga $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$. Dokazaćemo da je ovo najmanja funkcija praga koja se može dobiti u nekom od slučajeva. Posmatrajmo za početak slučaj u kome se u K_k nalazi tačno l trouglova, za neko l, i uočimo konfiguraciju tih l trouglova za koju je pokriven najveći broj grana, njih d (nazvaćemo to najrazuđenijom konfiguracijom). Tada je odgovarajuća funkcija praga $n^{-\frac{k+\binom{k}{2}-d}{l+\binom{k}{2}-d}}$. Ukoliko je sada $k \leq l$, imali bismo da je stepen n u funkciji praga veći od –1, pa bi ovaj svakako bio veći od $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$. Inače, za neku drugu konfiguraciju sa istim brojem trouglova u K_k imali bismo h grana manje pokriveno tim trouglovima iz K_k, koje bi se pokrile sa još h trouglova sa spoljnim čvorovima (kojih, dakle, ima još h), pa bi funkcija praga bila $n^{-\frac{k+\binom{k}{2}-d+h}{l+\binom{k}{2}-d+h}}$. Ali, zbog $k > l$, dobijamo da je ovo veće od $n^{-\frac{k+\binom{k}{2}-d}{l+\binom{k}{2}-d}}$, funkcije praga u najrazuđenijoj konfiguraciji ovog slučaja, pa je potrebno proveriti samo da li je $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$ manje od funkcije praga najrazuđenije konfiguracije svakog od slučajeva.

Ako je l dovoljno malo, svih l trouglova se mogu postaviti u K_k tako da nikoja dva nemaju zajedničku granu. Uzmimo neko takvo l. Za svaki od tih l trouglova, potrebno je izabrati $3l$ čvorova manje u odnosu na slučaj sa $l = 0$ (jer za svaki trougao potpuno u K_k, za tačno tri grane nam ne trebaju trouglovi sa spoljnim čvorovima, pa ni sami spoljni čvorovi), i $2l$ trouglova manje nego u tom slučaju (imamo tri spoljna trougla manje, ali i dobijamo jedan u K_k. To nam daje da $n^{-\frac{\binom{k+1}{2}-3l}{\binom{k}{2}-2l}}$ (funkcija praga u najrazuđenijoj konfiguraciji za ovakvo l) treba da bude bar $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$, što je zapravo ekvivalentno tome da je $k \geq 5$. (Upravo zbog toga je potrebno razdvojiti slučajeve $k = 4$ i $k \geq 5$, što je učinjeno prethodnom teoremom.) Dakle, kada god je l dovoljno malo (nećemo se baviti time šta je to dovoljno malo, jer nema uticaja na dokaz), funkcija praga u datom slučaju ni u kojoj konfiguraciji ne prelazi onaj za $l = 0$. Sada ćemo posmatrati slučajeve kada je l previše veliko, tako da se trouglovi ne mogu postaviti na K_k, a da nemaju zajedničkih grana. Neka je u nekom takvom pokrivanju K_k sa tačno l trouglova u samom K_k iskorišćeno ukupno x čvorova i y trouglova, i pošto je l dovoljno veliko da ne postoji konfiguracija bez preklapanja trouglova, uočimo neki trougao koji se u nekoliko svojih grana (jednoj ili dve) poklapa sa drugim trouglovima. Uočimo konfiguraciju trouglova nad K_k u kome je taj trougao zamenjen sa nekoliko spoljnih trouglova, po jednim za svaku granu tog trougla koja se ne poklapa sa nekom već postojećom. Očekivanje pre zamene trouglova je bilo $\Theta(n^x p^y)$, dok je nakon toga $\Theta(n^{x+1} p^y)$ ili $\Theta(n^{x+2} p^{y+1})$, sa odgovarajućom funkcijom praga redom $n^{-\frac{x}{y}}$, $n^{-\frac{x+1}{y}}$, $n^{-\frac{x+2}{y+1}}$. Dokazaćemo da su druge dve funkcije praga manje od prve, a pošto su to funkcije praga nekih od slučajeva za dovoljno malo l (jer uklanjanjem svih trouglova koji imaju preklapanja i dodavanjem odgovarajućih spoljnih trouglova, dobijamo slučaj u kome nema preklapanja trouglova ni u kojoj grani), koji su već ispitani i za koje je poznato da su im funkcije praga veće nego za $l = 0$, dobićemo da je za bilo koje l, funkcija praga najmanje $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$.

Dokažimo, dakle, da se ovakvom zamenom unutrašnjeg trougla spoljnim zaista smanjuje funkciju praga. Da je $n^{-\frac{x+1}{y}} \le n^{-\frac{x}{y}}$ je trivijalno. S druge strane, da je $n^{-\frac{x+2}{y+1}} \le n^{-\frac{x}{y}}$ je ekvivalentno tome da je $x \le 2y$. Ako sa d označimo broj grana pokrivenih unutrašnjim trouglovima pre zamene, imamo $x = k + \binom{k}{2} - d$ i $y = l + \binom{k}{2} - d$, pa se gornja nejednakost svodi na:

$$2l + \binom{k}{2} \ge k + d,$$

odnosno:

$$2l + \frac{k(k-3)}{2} \ge d.$$

Dalje, d je najviše $3l$, pa ćemo dokazati:

$$\frac{k(k-3)}{2} = \binom{k-1}{2} - 1 \ge l.$$

Broj sa kojim je ovde ograničen l je zapravo ocena za maksimalni broj trouglova koji se mogu postaviti u potpunosti na K_k i to tako da se nijedan trougao ne preklapa u sve tri svoje grane sa nekim drugim trouglovima. (Zapravo, pri postavljanju koje sledi, mi samo izbegavamo da direktno postavimo neki trougao čije su sve grane već postavljene, dok se događa da neki od već postojećih trouglova postanu višak nakon postavljanja određenog broja trouglova). On se dobija kada se na K_k postavljaju trouglovi tako da što veći mogući broj grana novog trougla u konfiguraciji već postoji u njoj, a da to ne budu baš sve tri. Na taj način, nakon postavljanja prvog trougla imamo K_3 unutar K_k. Sledeći trougao se može sa ovim već postavljenim poklapati u najviše jednoj grani, a da postavljanje i dalje bude ispravno. Treći trougao se sada već može poklapati u dve grane, tako da dobijamo potpuni K_4. Sledeći trougao, kada bi se u dve grane poklapao sa K_4, morao bi se poklapati i u trećoj (jer, naravno, K_4 sadrži granu između svaka dva čvora), što smo onemogućili, pa se dakle poklapa u samo jednoj grani. Dodavanjem još dva trougla sličnim postupkom dobijamo K_5, pa sa još četiri nova dobijamo K_6 … sveukupno, sa $1 + 2 + ... + k - 2 = \binom{k+1}{2}$ trouglova smo popunili ceo K_k, što daje ograničenje za l, broj trouglova u K_k. Važi nešto jača gornja ocena, $l \le \binom{k-1}{2} - 1$, jer usled indirektnog preklapanja svih grana nekog trougla, koje je opisano gore, maksimalni broj trouglova koji se mogu postaviti u K_5 bez viška (odnosno bez trouglova čije sve tri grane već postoje) nije $6 = \binom{k-1}{2}$, prema gornjoj oceni za l, već $5 = 6 - 1$.

Ovime smo pokazali da je $n^{-\frac{k+1}{k-1}}$ najmanja potencijalna funkcija praga koja se može dobiti. Dokažimo da je ovo i zaista funkcija praga postojanja K_k u $G_3(n, p)$. Ako je $p \ll n^{-\frac{k+1}{k-1}}$, imamo da je očekivana vrednost broja konfiguracija trouglova nad K_k sa $l = 0$, $\Theta\left(n^{\binom{k+1}{2}} p^{\binom{k}{2}}\right) = o(1)$, pa iz leme 21 i prethodno dokazane činjenice da ovakva konfiguracija ima najmanju funkciju praga, imamo da se ma koja konfiguracija trouglova koja daje K_k pojavljuje gotovo nikad, odnosno K_k se javlja sa vrlo malom verovatnoćom. Ostaje da pokažemo da se za $p \gg n^{-\frac{k+1}{k-1}}$ konfiguracija trouglova sa $l = 0$, a samim tim i K_k, javlja gotovo uvek. Posmatrajmo odgovarajuću Δ^* za niz (simetričnih) događaja A_i koji prikazuju pojavljivanje i-te tražene konfiguracije sa $l = 0$. S tim ciljem, fiksirajmo neku ovu konfiguraciju i uočimo drugu koja se s njom preklapa u tačno z trouglova. Pošto nas zanimaju samo one konfiguracije koje su zavisne od one fiksirane, potrebno je da bude $z \geq 1$, a takođe je i $z < \binom{k}{2}$. Dalje, ako je t broj temena u kojima se poklapaju ove dve konfiguracije, potrebno je da sabirak u Δ^* koji se odnosi na one konfiguracije koje se sa fiksnom preklapaju u tačno t temena i z trouglova, a koji je $\Theta\left(n^{\binom{k+1}{2}-t} p^{\binom{k}{2}-z}\right)$, bude zapravo $o\left(n^{\binom{k+1}{2}} p^{\binom{k}{2}}\right)$, što je ekvivalentno tome da je $\frac{t}{z} > \frac{k+1}{k-1}$. Da bismo dokazali ovu nejednakost, za dato z ćemo minimizovati t i pokazati da i za tako izabrano t nejednakost i dalje važi. U t, broju čvorova, učestvuju čvorovi iz K_k i spoljni čvorovi. Spoljnih ima tačno koliko i trouglova, dakle z, dok onih iz K_k ima najmanje i, gde je i broj za koji je $\binom{i}{2} \geq z > \binom{i-1}{2}$ (jer $i-1$ čvor određuje $\binom{i-1}{2}$ grana, što prema izboru i nije dovoljno za svaki spoljni trougao, koji svaki mora da sadrži tačno jednu granu, pa je potrebno bar i čvorova iz K_k). Sada imamo:

$$i \leq k \Rightarrow \frac{2}{i-1} \geq \frac{2}{k-1} \Rightarrow \frac{i}{\frac{i-1}{2}} \geq \frac{2}{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{i}{\binom{i}{2}} \geq \frac{2}{k-1} \Rightarrow \frac{i}{z} \geq \frac{2}{k-1} \Rightarrow \frac{t}{z} = \frac{i+z}{z} \geq \frac{k+1}{k-1},$$

što daje:

$$\Delta^* = o\left(n^{\binom{k+1}{2}} p^{\binom{k}{2}}\right),$$

jer u prethodnoj nejednakosti jasno ne važi jednakost za baš sve vrednosti z. Posledica 17 završava dokaz, odnosno za $p \gg n^{-\frac{k+1}{k-1}}$ se javlja gotovo uvek. □

Vektorska slučajna promenljiva

Definicija 33. Preslikavanje $\vec{V} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ takvo da $\vec{V}$ u kodomenu uzima prebrojivo mnogo vrednosti i da je $\vec{V}^{-1}(\vec{v}) \in \mathcal{F}$ za sve $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ naziva se diskretna vektorska slučajna promenljiva.

Definicija podseća na definiciju obične (realne) slučajne promenljive, stoga se postavlja pitanje da li i za vektorsku slučajnu promenljivu važe neka osnovna svojstva koja ima i realna. U nastavku ćemo pokazati da ta značajna svojstva zaista važe. Za početak, vektorsku slučajnu promenljivu ćemo, kao i realnu, opisivati pomoću vrednosti iz njenog kodomena i verovatnoćama sa kojima ih ova dostiže, odnosno:

$$\vec{V} \sim \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Definicija 34. Diskretne vektorske slučajne promenljive $\vec{V}$ i $\vec{W}$ su nezavisne ako za sve vrednosti $\vec{v}$ i $\vec{w}$ koje u kodomenu mogu uzeti $\vec{V}$ i $\vec{W}$, redom, važi da je:

$$P(\vec{V} = \vec{v} \mid \vec{W} = \vec{w}) = P(\vec{V} = \vec{v})$$

i

$$P(\vec{W} = \vec{w} \mid \vec{V} = \vec{v}) = P(\vec{W} = \vec{w}).$$

U daljem radu koristimo oznaku $|\vec{v}|$ za euklidsku normu vektora $\vec{v}$.

Definicija 35. Skalarni proizvod vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$, u oznaci $\vec{v} \cdot \vec{w}$, je vrednost izraza:

$$|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{w}).$$

Definicija 36. Matematičko očekivanje diskretne vektorske slučajne promenljive $\vec{V}$ u oznaci

$E(\vec{V})$ je vektor $\sum_i \vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)$, gde su $\vec{v}$ vrednosti koje može uzeti slučajna promenljiva.

Teorema 37. Za svake dve diskretne vektorske slučajne promenljive $\vec{V}$ i $\vec{W}$, važi:

1. ako je c konstanta, $E(c\vec{V})=cE(\vec{V})$;
2. ako je $\vec{w}$ vektor, $E(\vec{w}\cdot\vec{V})=\vec{w}\cdot E(\vec{V})$;
3. $E(\vec{V}+\vec{W})=E(\vec{V})+E(\vec{W})$;
4. ako su $\vec{V}$ i $\vec{W}$ nezavisne vektorske slučajne promenljive, $E(\vec{V}\cdot\vec{W})=E(\vec{V})\cdot E(\vec{W})$;
5. ako je $|\vec{V}|\le|\vec{W}|$, tada $E(|\vec{V}|)\le E(|\vec{W}|)$.

Dokaz.

1.

$$E(c\vec{V})=\sum_i c\vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)=c\sum_i \vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)=cE(\vec{V})$$

2.

$$E(\vec{w}\cdot\vec{V})=\sum_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)\vec{w}\cdot\vec{v}_i=$$

$$=\vec{w}\cdot\sum_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)\vec{v}_i=\vec{w}\cdot E(\vec{V})$$

3.

$$E(\vec{V}+\vec{W})=\sum_{i,j}(\vec{v}_i+\vec{w}_j)P(\vec{V}=\vec{v}_i\wedge\vec{W}=\vec{w}_j)=$$

$$=\sum_{i,j}\vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i\wedge\vec{W}=\vec{w}_j)+$$

$$+\sum_{i,j}\vec{w}_j P(\vec{V}=\vec{v}_i\wedge\vec{W}=\vec{w}_j)=$$

$$=\sum_i \vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)+\sum_j \vec{w}_j P(\vec{W}=\vec{w}_j)=E(\vec{V})+E(\vec{W})$$

4.

$$E(\vec{V}\cdot\vec{W})=\sum_{i,j}\vec{v}_i\cdot\vec{w}_j P(\vec{V}=\vec{v}_i\wedge\vec{W}=\vec{w}_j)=$$

$$=\sum_{i,j}\vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)\cdot\vec{w}_j(\vec{W}=\vec{w}_j)=$$

$$=\left(\sum_i \vec{v}_i P(\vec{V}=\vec{v}_i)\right)\cdot\left(\sum_j \vec{w}_j(\vec{W}=\vec{w}_j)\right)=$$

$$=E(\vec{V})\cdot E(\vec{W}),$$

gde koristimo činjenicu $P(A\wedge B)=P(A)P(B)$, ako i samo ako su A i B nezavisni.

5. $|\vec{V}|$ i $|\vec{W}|$ su zapravo realne slučajne promenljive, dakle za njih važe svojstva istih. □

Pošto je $|\vec{V}|$ realna slučajna promenljiva, za nju važi i Markovljeva nejednakost:

$$P(|\vec{V}|\ge a)\le\frac{E(|\vec{V}|)}{a}.$$

Definicija 38. Varijansa (disperzija) vektorske slučajne promenljive $\vec{V}$, u oznaci $\mathrm{Var}(\vec{V})$, je $E(\vec{V}-E(\vec{V})^2)$, gde kvadrat predstavlja skalarni proizvod vektora sa samim sobom.

Teorema 39. $\mathrm{Var}(\vec{V})=E(\vec{V}^2)-E(\vec{V})^2$.

Dokaz.

$$\mathrm{Var}(\vec{V})=E(\vec{V}-E(\vec{V})^2)=$$

$$=E(\vec{V}^2+E(\vec{V})^2-2\vec{V}\cdot E(\vec{V}))=$$

$$=E(\vec{V}^2)+E(E(\vec{V})^2)-E(2\vec{V}E(\vec{V}))=$$

$$=E(\vec{V}^2)+E(\vec{V})^2-2E(\vec{V})E(\vec{V})=$$

$$E(\vec{V}^2)-E(\vec{V})^2.$$

□

I za varijansu vektorske slučajne promenljive važe analogna svojstva koja ima realna. To potvrđuje sledeća teorema.

Teorema 40. Ako su $\vec{V}$ i $\vec{W}$ diskretne vektorske slučajne promenljive, c realna konstanta i $\vec{u}$ vektorska konstanta, važi:

1. $\mathrm{Var}(\vec{V})\ge 0$
2. $\mathrm{Var}(\vec{u})=0$
3. $\mathrm{Var}(c\vec{v})=c^2\mathrm{Var}(\vec{v})$
4. $\mathrm{Var}(\vec{u}\cdot\vec{V})=\vec{u}^2\mathrm{Var}(\vec{V})$
5. $\mathrm{Var}(\vec{u}+\vec{V})=\mathrm{Var}(\vec{V})$
6. ako su $\vec{V}$ i $\vec{W}$ nezavisni, $\mathrm{Var}(\vec{V}+\vec{W})=\mathrm{Var}(\vec{V})+\mathrm{Var}(\vec{W})$.

Dokaz.

1.

$$\mathrm{Var}(\vec{V})=E(\vec{V}-E(\vec{V})^2)=E(|\vec{V}-E(\vec{V})|^2)\ge 0$$

2.

$$\mathrm{Var}(\vec{u})=E(\vec{u}^2)-E(\vec{u})^2=\vec{u}^2-\vec{u}^2=0$$

3.

$$\mathrm{Var}(c\vec{V})=E((c\vec{V})^2)-E(c\vec{V})^2=$$

$$=E(c^2\vec{V}^2)-(cE(\vec{V}))^2=c^2E(\vec{V}^2)-c^2E(\vec{V})^2=$$

$$=c^2(E(\vec{V}^2)-E(\vec{V})^2)=\mathrm{Var}\,c^2(\vec{V})$$

4.

$$\mathrm{Var}\,(\vec{u}\cdot\vec{V}) = E((\vec{u}\cdot\vec{V})^2) =$$
$$= \vec{u}^2(E(\vec{V}^2) - E(\vec{V})^2) = \vec{u}^2\mathrm{Var}\,(\vec{V})$$

5.

$$\mathrm{Var}\,(\vec{u}+\vec{V}) = E((\vec{u}+\vec{V})^2) - E(\vec{u}+\vec{V})^2 =$$
$$= E(\vec{u}^2 + \vec{V}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{V}) + (\vec{u} + E(\vec{V}))^2 =$$
$$= \vec{u}^2 + E(\vec{V}^2) + 2\vec{u}\cdot E(\vec{V}) - \vec{u}^2 - E(\vec{V})^2 - 2\vec{u}\cdot E(\vec{V}) =$$
$$= E(\vec{V}^2) - E(\vec{V})^2 = \mathrm{Var}\,(\vec{V})$$

6.

$$\mathrm{Var}\,(\vec{V}+\vec{W}) = E((\vec{V}+\vec{W})^2) - E(\vec{V}+\vec{W})^2 =$$
$$= E(\vec{V}^2 + \vec{W}^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{W}) - E(\vec{V})^2 - E(\vec{W})^2 -$$
$$-2E(\vec{V})\cdot E(\vec{W}) = E(\vec{V}^2) + E(\vec{W}^2) + 2E(\vec{V}\cdot\vec{W}) -$$
$$-E(\vec{V})^2 - E(\vec{W})^2 - 2E(\vec{V})\cdot E(\vec{W}) =$$
$$\mathrm{Var}\,(\vec{V}) + \mathrm{Var}\,(\vec{W}),$$

gde smo koristili da je $E(\vec{V}\cdot\vec{W}) = E(\vec{V})\cdot E(\vec{W})$ ako su $\vec{V}$ i $\vec{W}$ nezavisne. □

Definicija 41. Kovarijansa diskretnih vektorskih slučajnih promenljivih $\vec{V}$ i $\vec{W}$, u oznaci $\mathrm{Cov}(\vec{V},\vec{W})$, uzima vrednost:

$$E(\vec{V}\cdot\vec{W}) - E(\vec{V})\cdot E(\vec{W}).$$

Teorema 42. Ako su $\vec{V}$, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, …, $\vec{V}_n$ diskretne vektorske slučajne promenljive za koje je $\vec{V} = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$, važi:

$$\mathrm{Var}\,(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\,(\vec{V}_i) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(\vec{V}_i,\vec{V}_j).$$

Dokaz.

$$\mathrm{Var}\,(\vec{V}) = E(\vec{V} - E(\vec{V})^2) =$$
$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{V}_i\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}E(\vec{V})_i\right)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}E(\vec{V}_i^2) + \sum_{i\neq j}E(\vec{V}_i\cdot\vec{V}_j) - \sum_{i=1}^{n}E(\vec{V}_i)^2 -$$
$$-\sum_{i\neq j}E(\vec{V}_i)\cdot E(\vec{V}_j) = \sum_{i=1}^{n}(E(\vec{V}_i^2) - E(\vec{V}_i)^2) +$$
$$\sum_{i\neq j}\Big(E(\vec{V}_i\cdot\vec{V}_j) - E(\vec{V}_i)\cdot E(\vec{V}_j)\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\,(\vec{V}_i) + \sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(\vec{V}_i,\vec{V}_j).$$
□

Teorema 43 (nejednakost Čebiševa). Za sve diskretne vektorske slučajne promenljive $\vec{V}$ i $a > 0$, važi:

$$P(|\vec{V}| \geq a) \leq \frac{E(\vec{V}^2)}{a^2}.$$

Dokaz. Kako je $|\vec{V}|$ zapravo realna slučajna promenljiva i važi $\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2$, u smislu skalarnog proizvoda, direktnom primenom nejednakosti Čebiševa za realne slučajne promenljive, imamo:

$$P(|\vec{V}| \geq a) \leq \frac{E(|\vec{V}|^2)}{a^2} = \frac{E(\vec{V}^2)}{a^2}.$$
□

Posledica 44. Za diskretnu vektorsku slučajnu promenljivu $\vec{V}$ i pozitivno a važi:

$$P(|\vec{V} - E(\vec{V})| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}\,(\vec{V})}{a^2}.$$

Sada ćemo primeniti vektorske slučajne promenljive na konkretnom primeru.

Primer 45. Neka su $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ celobrojni dvodimenzionalni vektori dužine manje od:

$$N = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{100\sqrt{n}}.$$

Tada postoje disjunktni $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ takvi da važi:

$$\sum_{i\in I}\vec{v}_i = \sum_{j\in J}\vec{v}_j.$$

Rešenje. Prvo primetimo sledeće: ako se može izvršiti bilo kakav izbor elemenata skupova I i J, $I \neq J$, za koje važi uslov, mogu se naći i disjunktni I i J za koje bi uslov važio. Naime, uočimo skupove $I\setminus(I\cap J)$ i $J\setminus(I\cap J)$. Oni su disjunktni, i zbog osobina I i J za njih važi:

$$\sum_{i\in I\setminus(I\cap J)}\vec{v}_i + \sum_{i\in(I\cap J)}\vec{v}_i = \sum_{i\in I}\vec{v}_i = \sum_{j\in J}\vec{v}_j =$$
$$= \sum_{j\in J\setminus(I\cap J)}\vec{v}_j + \sum_{j\in(I\cap J)}\vec{v}_j \Rightarrow \sum_{i\in I\setminus(I\cap J)}\vec{v}_j = \sum_{j\in J\setminus(I\cap J)}\vec{v}_j.$$

Pretpostavimo sada da ne postoje različiti I i J koji zadovoljavaju uslov. Neka su $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ nezavisne vektorske slučajne promenljive sledećeg zakona raspodele:

$$\vec{V}_i \sim \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v}_i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i neka je $\vec{V}$ njihov zbir. Tada je:

$$E(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{n} E(\vec{V}_i) = \frac{\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n}{2}$$

i pošto su $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ svi nezavisni, varijansa njihovog zbira je zbir njihovih varijansi, odnosno:

$$\operatorname{Var}(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\vec{v}_i^2}{2} - \frac{\vec{v}_i^2}{4} \right) =$$

$$= \frac{\vec{v}_1^2 + \ldots \vec{v}_n^2}{4} \le \frac{nN^2}{4}.$$

Nejednakost Čebiševa nam dalje daje, za svako $\lambda > 1$:

$$P\left(|\vec{V} - E(\vec{V})| \ge \frac{\lambda n \sqrt{n}}{2} \right) \le \frac{\operatorname{Var}(\vec{V})}{\frac{\lambda n N^2}{4}} \le \lambda^{-2},$$

odakle je:

$$P\left(|\vec{V} - E(\vec{V})| < \frac{\lambda n \sqrt{n}}{2} \right) \ge \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}.$$

Verovatnoća s leve strane poslednje nejednakosti je zapravo verovatnoća da se vektor $\vec{V} - E(\vec{V})$ nalazi u krugu poluprečnika $\frac{\lambda N \sqrt{n}}{2}$, što je svakako manje verovatno od toga da se isti vektor nalazi u kvadratu stranice prečnika ovog kruga. S druge strane, po pretpostavci sve moguće vrednosti tog vektora su različite (inače bi postojala dva podskupa ovih n vektora sa istim zbirom elemenata, a samim tim i dva disjunktna podskupa, jer se jasno mogu obrisati svi zajednički članovi podskupova, što bi bilo u suprotnosti sa pretpostavkom), a samim tim i jednako verovatne, s pojedinačnom verovatnoćom 2^{-n}. Prema tome:

$$2^{-n}(\lambda N \sqrt{n} + 1)^2 \ge P(\vec{V} - E(\vec{V}) \in \square),$$

gde sa $\square$ označavamo gorepomenuti kvadrat. Kombinovanjem dvaju prethodnih nejednakosti dobijamo:

$$2^{-n}(\lambda N \sqrt{n} + 1)^2 \ge \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2},$$

odnosno mora biti:

$$N \ge \frac{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{1 - \lambda^{-2}} - 1}{\lambda \sqrt{n}}$$

za svako $\lambda > 1$, što očito nije tačno za $\lambda = 2$. Prema tome, pretpostavka nije dobra, i sigurno postoje dva odgovarajuća skupa I i J, a samim tim i disjunktni skupovi koji zadovoljavaju uslov Primera u celosti. $\square$

Zero-sum Remzijevi brojevi

Zero-sum Remzijeva teorija je vrlo bogata grana kombinatorike koja kombinuje teoriju brojeva, algebru, linearnu algebru, teoriju grafova i diskretnu analizu. Problemi koji se javljaju u ovoj teoriji su sledećeg tipa: sa datom kombinatornom strukturom, čijim su elementima dodeljene različite težine, tražimo uslove koji će nam garantovati postojanje određene podstrukture takve da težine njenih elemenata u zbiru daju nula. Mi ćemo sada prikazati pojmove koji zauzimaju jedno od centralnih mesta u ovoj oblasti.

Definicija 46. Remzijev broj $R(H, k)$ je najmanji ceo broj t takav da u bilo kom k-bojenju grana kompletnog r-uniformnog hipergrafa na t čvorova K_t^r postoji monohromatska kopija H.

Definicija 47. Zero-sum Remzijev broj $R(H, \mathbb{Z}_k)$ je najmanji ceo broj t takav da u bilo kom $\mathbb{Z}_k$-bojenju grana kompletnog r-uniformnog hipergrafa na t čvorova K_t^r postoji kopija H u kojoj je zbir boja svih grana jednak 0 u $\mathbb{Z}_k$.

Definicija 48. Bipartitan Remzijev broj $B(H, k)$ je najmanji ceo broj t takav da u bilo kom k-bojenju grana kompletnog bipartitnog grafa na $K_{t,t}$ postoji monohromatska kopija H.

Definicija 49. Zero-sum bipartitan Remzijev broj $B(H, \mathbb{Z}_k)$ je najmanji ceo broj t takav da u bilo kom $\mathbb{Z}_k$-bojenju grana kompletnog bipartitnog grafa na $K_{t,t}$ postoji kopija H u kojoj je zbir boja svih grana jednak 0 u $\mathbb{Z}_k$.

U ovom radu se nećemo zadržavati na prve tri klase Remzijevih brojeva datih u gornjim definicijama, a kojima je već i posvećena značajna pažnja na drugim mestima. Umesto toga, daćemo jedan konkretan rezultat u oblasti zero-sum bipartitnih Remzijevih brojeva, metodom koji bi se mogao iskoristiti i za izvođenje drugih rezultata, za različite vrste grafa H iz definicije. Naredne aproksimacije i koristimo u tu svrhu.

Lema 50. Za centralni binomni koeficijent $\binom{2m}{m}$ važi:

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} < \binom{2m}{m} < \frac{3\cdot 2^{2m}}{4\sqrt{m+1}}.$$

Dokaz. Indukcijom lako pokazujemo:

$$\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m} = \frac{1}{2m}\prod_{i=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{2i}\right) = \prod_{i=1}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2i}\right).$$

Dalje je:

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{2i}\right)^2 = \prod_{i=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{4i^2}\right) \geq \prod_{i=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{i}\right) = m,$$

odakle dobijamo:

$$\left(\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\right)^2 = \frac{1}{(2m)^2}\prod_{i=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{2i}\right)^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{4m^2}m = \frac{1}{4m}.$$

Korenovanjem prethodne nejednakosti dobijamo donje ograničenje:

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} < \binom{2m}{m}.$$

Iz prethodnih nejednakosti imamo:

$$\sqrt{m+1}\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{2i}\right) \leq \prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{2i}\right)\left(1-\frac{1}{2i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{4i^2}\right) \leq \frac{3}{4},$$

tako da dobijamo i gornje ograničenje:

$$\binom{2m}{m} = 2^{2m}\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{2i}\right) \leq \frac{3\cdot 2^{2m}}{4\sqrt{m+1}}.$$

□

Sada ćemo predstaviti dobijenu granicu koja je poboljšanje u odnosu na prethodno poznatu:

Teorema 51. Ako je $c = \frac{k}{n^2}$ i $k|n^2$, onda je

$$B(K_{n,n}, \mathbb{Z}_k) > (1+o(1))\frac{1}{e}ne^{\frac{cn^2}{2(e+c)}}.$$

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti leme 52 i 53.

Lema 52. Ako je K_t obojen u $\mathbb{Z}_k$, uz $k \left| \binom{t}{2} \right.$, tako da u njemu postoji najviše zero-sum kopije (odnosno kopije u kojima je zbir boja svih grana jednak 0 u $\mathbb{Z}_k$) povezanog bipartitnog grafa G na n čvorova, onda je $B(G, \mathbb{Z}_k) > \frac{t}{2}$.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je t parno. Posmatrajmo prostor verovatnoće u kome se uniformno bira neka od podela čvorova K_t na dve particije od po $\frac{t}{2}$ čvorova. Povezani bipartitni graf ima tačno dva različita načina podele u particije, koja su jedinstveno određena izborom particije nekog njegovog čvora v. Neka je a broj čvorova koji se pri ispravnoj podeli čvorova G nalaze u particiji sa čvorom v. Tada je verovatnoća da je neka kopija G u K_t ispravno podeljena jednaka $p = \frac{2\binom{t-a}{\frac{t}{2}-a}}{\binom{t}{\frac{t}{2}}}$ (brojilac predstavlja broj podela čvorova K_t ispravnih za neku kopiju G, dok je imenilac ukupan broj podela na dve jednake particije). Neka je s neka kopija G u K_t, i neka je I_s indikatorska slučajna promenljiva sa 1 ako je G ispravno podeljen, i 0 inače. Ako je S skup posmatranih kopija G, očekivani broj ispravno podeljenih kopija iz S je:

$$E\left(\sum_{s\in S} I_s\right) = \sum_{s\in S} E(I_s) = |S|\,p.$$

Ako je $|S| \leq \frac{1}{p}$, očekivanje je manje od 1, pa postoji neka podela čvorova K_t pri kojoj niti jedna kopija G nije ispravno podeljena, odnosno sve kopije $G \in S$ imaju bar jednu granu čija su oba čvora u istoj particiji. Ako za S uzmemo skup kopija G u K_t koje su zero-sum u bojenju grana sa najviše $\frac{1}{p}$ takvih kopija G, biranjem podele bez ispravnih kopija G i brisanjem svih grana unutar dve particije, dobijamo kompletan bipartitan graf na po $\frac{t}{2}$ čvorova u particijama u kome ne postoji niti jedna zero-sum kopija G (jer je svakoj koja je prethodno postojala obrisana bar jedna grana). Ostaje još da pronađemo adekvatnu ocenu za $\frac{1}{p}$. Lema 50 nam daje:

$$\frac{1}{p}=\frac{\binom{t}{\frac{t}{2}}}{2\binom{t-n}{\frac{t}{2}-a}}\geq\frac{\binom{t}{\frac{t}{2}}}{2\binom{t-n}{\frac{t}{2}-\frac{n}{2}}}\geq$$

$$\geq\frac{\frac{2^t}{\sqrt{2t}}}{\frac{3\cdot 2^{t-n}}{\sqrt{2t-2n+4}}}=\frac{2^n}{3}\sqrt{\frac{t-n+2}{t}},$$

što završava dokaz leme. □

Lema 53. Neka je G bipartitan graf sa m grana, $k|m$ prirodan broj. Ako za neke prirodne brojeve l, t i:

$$A=\sum_{i=0}^{\frac{m}{k}}\binom{l}{ik}\binom{\binom{t}{2}-l}{m-ik},$$

važi da je:

$$\frac{AS}{\binom{\binom{t}{2}}{m}}<\frac{2^n}{3}\sqrt{\frac{t-n+2}{t}},$$

gde je S broj kopija G u K_t, onda je $B(G, \mathbb{Z}_k)>\frac{t}{2}$.

Dokaz. Posmatraćemo prostor verovatnoće u kome uniformno biramo neko od bojenja grana K_t u kome je l grana obojeno sa 1, dok su ostale obojene sa 0 u $\mathbb{Z}_k$. Odaberimo dalje uniformno neki od svih mogućih raspodela u niz skupova m grana sa zbirom boja jednakim 0 pri tom bojenju. Označimo sa I_j indikatorsku slučajnu promenljivu za događaj da je na j-tom mestu u nizu izabran skup m grana izomorfan sa G. Verovatnoća tog događaja je $p=\frac{S}{\binom{\binom{t}{2}}{m}}$ (jer zbog uniformnog izbora bojenja i rasporeda u niz, svaki skup m grana ima jednaku verovatnoću da bude izabran na j-tom mestu, a od mogućih $\binom{\binom{t}{2}}{m}$ skupova, nama odgovara njih S). Kako u nizu imamo tačno A pozicija (jer se u svakom zero-sum skupu pojavljuje ik grana sa bojom 1, za neko i, a takvih skupova ima $\binom{l}{ik}\binom{\binom{t}{2}-l}{m-ik}$, pa sumiranjem po svim i dobijamo A), očekivani broj pozicija u nizu na kojima se nalaze zero-sum skupovi m grana izomorfni sa G (a samim tim i očekivani broj zero-sum kopija G u K_t, jer pozicije u nizu sadrže sve zero-sum skupove m grana pri nekom bojenju K_t) je:

$$E=E\left(\sum_{i=1}^{A}I_i\right)=\sum_{i=1}^{A}E(I_i)=A\,p,$$

što je po uslovu leme manje od $\frac{2^n}{3}\sqrt{\frac{t-n+2}{t}}$. Prema tome, postoji neko bojenje pri kome je broj zero-sum kopija G u K_t manji ili jednak očekivanju, pa prema lemi 52 dobijamo $B(G, \mathbb{Z}_k)>\frac{t}{2}$.

Napomena: Dokaz leme 52 se zasniva na sličnom tvrđenju iz referentnog rada (Silađi i Šobot 2017).

Nastavimo sad sa dokazom teoreme 51. U radu Eve Silađi i Branislava Šobota (2017) može se pronaći sledeća ocena za A:

$$A<\frac{e^{\frac{em^2}{em+k}}\left(\frac{m}{k}+1\right)t^{2m}}{m^m 2^m},$$

dok u članku S. Dasa (2016) nalazimo da za $\omega(1)=b==o(\sqrt{a})$ važi:

$$\binom{a}{b}=(1+o(1))\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\left(\frac{ae}{b}\right)^b.$$

Nađimo sada konkretnu ocenu za $B(G, \mathbb{Z}_k)$. Imamo da je S iz leme 53 za $G=K_{n.n}$ jednak $\frac{\binom{t}{n}\binom{t-n}{n}}{2}$, pa primenom gornjih ograničenja za A i binomne koeficijente dobijamo ($m=n^2$):

$$\frac{AS}{\binom{\binom{t}{2}}{n^2}} < \frac{\frac{e^{\frac{en^2}{e+c}}}{n^{2n^2}2^{n^2}} \cdot \frac{\binom{t}{n}\binom{t-n}{n}}{2}}{\binom{\frac{t(t-1)}{2}}{n^2}} <$$

$$< (1+o(1)) \frac{\frac{e^{\frac{en^2}{e+c}}\left(\frac{1}{c}+1\right)t^{2n^2}}{n^{2n^2}2^{n^2}} \cdot \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{t(t-n)e^2}{n^2}\right)^n}{\frac{1}{n\sqrt{2\pi}}\left(\frac{t^2 e}{2n^2}\right)^{n^2}} <$$

$$< (1+o(1)) \frac{e^{2n-\frac{cn^2}{e+c}}\left(1+\frac{1}{c}\right)t^{2n}}{2\sqrt{2\pi}\, n^{2n}}.$$

Stepenovanjem sa $\frac{1}{2n}$, dobijamo da je krajnja desna strana prethodne nejednakosti manja od $\frac{2^{2n}}{3\sqrt{2}}$ za:

$$t = (1+o(1))\,\frac{2}{e}\, n e^{\frac{cn^2}{2(e+c)}},$$

a tada je i:

$$\frac{3^{2n}}{3\sqrt{2}} < \frac{3^{2n}}{3}\sqrt{\frac{t-n+2}{t}},$$

pa je prema lemi 53:

$$B(K_{n,n}, \mathbb{Z}_k) > (1+o(1))\frac{1}{e} n e^{\frac{cn^2}{2(e+c)}}. \qquad \square$$

Napomena: Za sve vrednosti c sem $c = 1$, rezultat prethodne teoreme daje poboljšanje ocene koja se može naći u radu Jaira Karoa (Caro 1996).

Metod primenjen u teoremi 51 bi mogao dati nova ograničenja i za druge tipove grafova G, poput $K_{m,n}$ ili $lK_{m,n}$ (graf koji sačinjava l disjunktnih kopija $K_{m,n}$), ali biramo da se ovde zaustavimo.

Zaključak

Kao što je u radu pokazano, probabilistički metod nalazi primenu u različitim oblastima matematike, uključujući kombinatoriku, teoriju grafova, Remzijevu teoriju, teoriju brojeva itd. Posebnu pažnju smo ovom prilikom posvetili metodu drugog momenta i njegovoj primeni u nalaženju funkcija praga različitih vrsta grafova. Značajno mesto ovde zauzima rezultat vezan za funkciju praga kompletnih grafova u nešto izmenjenom prostoru verovatnoće, kojim se literatura slabo bavila. Ovaj rezultat može dati dobru polaznu tačku za istraživanje u ovakvom prostoru verovatnoće, što bi i mogla biti tema nekog od budućih radova.

Drugi tip problema koji je razmatran u ovom radu jesu problemi Remzijeve teorije, oblasti koja se razvija značajnom brzinom. Rad zapravo daje poboljšanje rezultata iz rada Jaira Karoa (Caro 1996) vezanog za jedno od mnogobrojnih uopštenja Remzijevog broja, zero-sum bipartitni Remzijev broj.

Literatura

Alon N., Spencer J. H. 2000. *The Probabilistic Method*. Wiley

Bertsekas D. P., Tsitsiklis J. N. 2000. *Introduction to Probability, lecture notes*. MIT

Bollobás B. 1985. *Random Graphs*. Academic Press

Caro Y. 1992. On Several Variations of the Turan and Ramsey Numbers. *Journal of Graph Theory*, **16** (3): 257.

Caro Y. 1996. Zero-sum problems – A survey. *Discrete Mathematics*, **152** (1): 93

Das S. 2016. A brief note on estimates of binomial coefficients. Dostupno na: http://page.mi.fu-berlin.de/shagnik/notes/binomials.pdf

Matoušek J., Vondrák J. 2008. The probabilistic method, lecture notes. Praha: Katedra aplikované matematiky, Univerzita Karlova

Silađi E., Šobot B. 2017. Probabilistički metod i zero-sum Ramsey brojevi. *Petničke sveske*, 76: 181.

Strahinja Gvozdić and Milica Šobot

Second Moment Method and Random Graphs. Zero-sum Ramsey Numbers

The probabilistic method is a technique used in mathematics usually for proving the existence of some mathematical objects or structures with certain properties. We will show applications of the probabilistic method in various areas of mathematics, such as combinatorics, graph theory, Ramsey theory, number theory etc. In this paper we show how to use the Second Moment method to find values of the threshold function for certain properties in classic random graphs, as well as in a probability space in which on n vertices we put triangles (connect each of three vertices with the other two) with a probability p. Additionally, we define the vector random variable and apply its properties while solving a problem using the above mentioned method. In the last section of this paper we transfer to Zero-sum Ramsey theory and present an improvement to a previously known border for a zero-sum bipartite Ramsey number of a $K_{m,n}$ graph.