Milica Maksimović i Milena Jelić

Ekspanzija celularnih automata

Celularni automat je, neformalno rečeno, beskonačan sistem (tabla) koji se sastoji od jediničnih polja pri čemu svako polje, u diskretnim vremenskim trenucima, istovremeno menja svoje stanje na osnovu stanja svojih suseda iz prethodnog trenutka. Ispostavlja se da neverovatno jednostavna pravila promene prouzrokuju izuzetno kompleksna ponašanja automata i interesantne strukture. Najpoznatiji primer je Game of Life *automat. U radu su razmatrani 2D binarni (crno-beli) automati i rešavani problemi određivanja minimalnog broja početnih crnih polja automata neophodnih da bi sva polja unapred datog skupa (uglavnom kvadratna podtabla date dimenzije) postala crna posle konačno mnogo koraka. Dobijeni su rezultati za različita lokalna pravila, oblike table i vrste susedstva.*

Uvod

Celularni automat (CA) je diskretni, apstraktni model koji se pokazao jako korisnim u predstavljanju nelinearnih dinamičkih promena u mnogim naučnim oblastima. Neformalno rečeno, celularni automat predstavlja beskonačan skup polja od kojih svako može biti u nekom stanju (iz konačnog skupa stanja) pri čemu svako polje istovremeno menja svoje stanje na osnovu istog lokalnog pravila, tj. menja svoje stanje na osnovu stanja svojih suseda iz prethodnog trenutka. Ovaj proces se ponavlja u diskretnim vremenskim trenucima i dovodi do toga da veoma jednostavno lokalno pravilo može dovesti do izuzetno kompleksnog ponašanja automata i interesantnih struktura.

Mnogi procesi u prirodi se menjaju u odnosu na dešavanja u njihovoj okolini, odnosno na osnovu nekog lokalnog pravila, te su pogodni za modeliranje pomoću celularnih automata. Na primer, dinamika fluida se može modelirati uz pomoć celularnih automata, na osnovu lokalnog pravila osmišljenog da simulira kretanje čestica. Celularni automati predstavljaju pogodan matematički model za paralelno programiranje, jer omogućavaju

Milica Maksimović (2001), Bačka Palanka, učenica 3. razreda Gimnazije „20.oktobar” u Bačkoj Palanci

Milena Jelić (2000), Bač, učenica 4. razreda Gimnazije „20.oktobar” u Bačkoj Palanci

MENTOR: Nikola Milosavljević, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Nišu

da se puno promena dešava istovremeno i da se od jednostavnog pravila ažuriranja razvije veoma komplekan sistem.

Za početak, dajemo formalnu definiciju d-dimenzionalnih celularnih automata:

Definicija 1 (Kari 2004). Celularni automat (CA) A je uređena četvorka (T, S, N, f), gde je:

- $T = \mathbb{Z}^d$ je skup polja celularnog automata (zamišljamo ga kao beskonačnu d-dimenzionalnu tablu).
- S je konačan skup stanja (boja). Svako polje iz $\mathbb{Z}^d$ je u nekom od stanja iz S.
- $N = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_m)$ je vektor susedstva čije su koordinate d-dimenzionalni vektori. Za svako polje elementi ovog vektora predstavljaju relativne pozicije suseda od kojih zavisi naredno stanje polja.
- $f : S^m \to S$ je funkcija koja predstavlja lokalno pravilo promene; polje $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$ prelazi iz trenutnog stanja u stanje $f(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, gde je s_i trenutno stanje polja $\vec{x} + \vec{n}_i$.

Najčešće se analiziraju celularni automati u jednoj i dve dimenzije. Jedan od najpoznatijih dvodimenzionalnih CA je *Game of Life* koji je predložio engleski matematičar Džon Konvej 1970. godine. Polja u ovom automatu mogu biti u dva stanja (živa ili mrtva). Ovaj CA može da se koristi za simuliranje određenih bioloških sistema (Wolfram 1984). Još jedan poznat primer CA jeste *Langton's Ant*. To je dvodimenzionalan CA, a polja mogu biti u 8 različitih stanja.

U radu ćemo razmatrati dvodimenzionalne CA i njihove varijacije. Neka je CA $A = (T, S, N, f)$ gde je $T = \mathbb{Z}^2$. Ukoliko je $S = \{0, 1\}$ tada A nazivamo crno-beli CA (0 – bela, 1 – crna, zamišljamo ga kao beskonačnu tablu izdeljenu na crno-bele kvadratiće). Kažemo da je *A sa 4-susedstvom* ukoliko je $S = \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$. tj. ukoliko smatramo da su dva polja susedna ako imaju zajedničku ivicu. Analogno, kažemo da je *A sa 8-susedstvom* ukoliko smatramo da su dva polja susedna ako imaju bar jedno zajedničko teme.

Napomenimo da se pojam CA može uopštiti – ne moramo posmatrati samo d-dimenzionalne rešetke već skup T može biti bilo koja (konačna ili beskonačna) struktura u kojoj je pojam *relativna pozicija suseda* jednoznačno definisan za svako polje iz T. Moguće varijacije 2D CA su pravilna popločavanja ravni trouglovima i šestouglovima (polja su odgovarajući mnogouglovi, klasični 2D CA se može zamisliti kao pravilno popločavanje ravni kvadratima) kao i konačni skupovi polja ovih automata na torusu.

Definicija 2. Neka je $A = (T, S, N, f)$ crno-beli CA i neka je P konačan podskup skupa T. Vrednost $M(A, P)$ predstavlja minimalan broj x takav da postoji početna konfiguracija CA A sa tačno x crnih polja, koja su sva u P, za koju važi da posle konačno mnogo iteracija automata A sva polja skupa P postaju crna.

Specijalno, ako je A dvodimenzionalni CA i P skup polja koja čine kvadratnu podtablu dimenzija $n \times n$, koristimo oznaku $M(A, n) = M(A, P)$.

Dakle, $M(A, n)$ predstavlja najmanji broj polja koje moramo obojiti u crno (na početnoj beloj beskonačnoj tabli), tako da posle konačno mnogo promena stanja po pravilu automata A, sva polja date $n \times n$ podtable postanu crna. Određivanje ovih vrednosti je glavni doprinos rada. Sam rad se sastoji iz nekoliko delova: u prvom delu se određuje ova vrednost za A_k i B_k 2D automate. U drugom delu rada ove vrednosti se određuju za modifikovane 2D automate (heksagonalne i trougaone table). Na kraju se razmatra generalizacija za beskonačne podtable.

A_k i A_k' automati

U ovoj glavi posmatraju se određene vrste celularnih automata u ravni koje su definisane u nastavku.

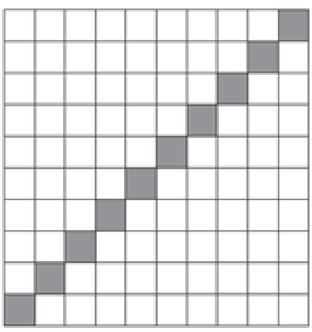
Definicija 3. A_k automat je dvodimenzionalni crno-beli automat sa 4-susedstvom, u kome belo polje prelazi u crno ako i samo ako ima bar k crnih suseda dok crno polje uvek ostaje crno. A_k' je dvodimenzionalni crno--beli automat sa 8-susedstvom i istim lokalnim pravilom promene kao i A_k automat.

Teorema 1. $M(A_1, n) = 1$.

Dokaz. Jasno je da je $M(A_1, n) \geq 1$. Ako u nekom trenutku ima i belih i crnih polja u datoj podtabli, tada moraju postojati bar dva susedna polja različite boje, pa će u sledećem trenutku bar jedno belo polje postati crno. Dakle, bez obzira koje je početno polje crno, broj belih polja se strogo smanjuje u svakoj iteraciji – posle konačno mnogo iteracija sva polja će biti crna. □

Teorema 2. $M(A_2, n) = n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je minimalan broj polja t. Neka je obim svih polja O. Pošto su polja jedinični kvadrati, sledi da je $O \leq 4t$. Primetimo da ako belo polje ima tačno dva crna suseda, kada promeni boju, obim se neće promeniti. Ako belo polje ima više od dva crna suseda, u sledećem koraku obim će se smanjiti. Dakle, možemo zaključiti da se obim nikada ne povećava. Kada se oboje sva polja, obim figure iznosi $4n$, pa zaključujemo da mora da važi $O \geq 4n$. Iz $4t \geq O \geq 4n$ vidimo da je minimalna vrednost za t upravo $t = n$. Primer odgovarajuće početne konfiguracije sa n polja je 'crna velika dijagonala' kao na slici 1. □



Slika 1.
A_2 automat

Figure 1.
A_2 automaton

Teorema 3. $\frac{n^2+2n}{3} \leq M(A_3, n) \leq \frac{3n^2+4n}{8}$.

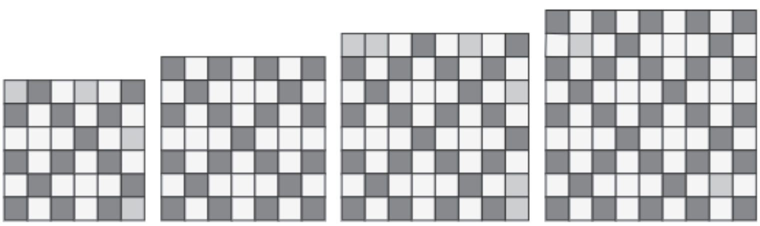
Dokaz. Pretpostavimo da je minimalan broj obojenih polja t. Označimo obim svih polja sa O. Pošto su polja kvadratnog oblika, sledi da je $O \leq 4t$. Ako je neko belo polje okruženo sa tačno tri crna polja, kada to polje promeni boju, obim figure će se smanjiti za dva. Ako je belo polje okruženo sa sva četiri crna polja, obim će se u sledećoj iteraciji smanjiti za četiri. Belih polja imamo $n^2 - t$, pa kada sva polja postanu crna, obim će biti sigurno manji ili jednak od $4t - 2(n^2 - t)$, a kako je krajnji obim jednak $4n$, sledi $4t - 2(n^2 - t) \geq 4n$. Nakon sređivanja izraza, dobijamo $t \geq \frac{n^2+2n}{3}$.

Gornje ograničenje sledi iz konstrukcije. Prvo se oboji jedna glavna dijagonala i proizvoljna dijagonala dužine tri normalna na glavnu obojenu dijagonalu, a zatim svaka četvrta dijagonala paralelna sa njima. U slučaju kad je $n \equiv 3 \pmod 4$ vidimo da u svakoj drugoj vrsti imamo $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ crnih polja, a u preostalim vrstama se naizmenično smenjuje broj crnih polja ($\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ ili $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$). Dakle u ovom slučaju imamo da je:

$$M(a_3, n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \left(\frac{n+1}{4} \right) \left(\frac{n-1}{2} \right) - \frac{n-3}{4} =$$

$$= \frac{3n^2+2n+7}{8}.$$

U slučaju kada je $n \equiv 1 \pmod 4$ na sličan način možemo doći do formule, s tim što se moraju obojiti još dva polja na drugoj glavnoj dijagonali kao na slici 2. U ovom slučaju traženi broj je $M(A_3, n) \leq \frac{3n^2+2n+19}{8}$. Dalje, kada je $n \equiv 2 \pmod 4$, primetimo da se na dve ivice mora obojiti dodatnih $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ polja, a kako ćoškovi moraju biti crni, moramo obojiti još 2 ćoška. Slično kao u prvom slučaju dolazimo do formule $M(A_3, n) \leq \frac{3n^2+4n-4}{8}$.



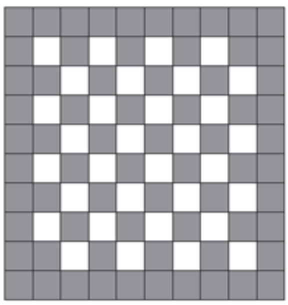
Slika 2.
A_3 automat

Figure 2.
A_3 automaton

Analogno za $n \equiv 0 \pmod 4$: mora se obojiti još po $\frac{n}{4}$ polja na dve ivice i još dodatna dva ćoška. U ovom slučaju tražena granica je $M(A_3, n) \le \frac{3n^2 + 4n}{8}$. $\square$

Teorema 4. $M(A_4, n) = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{2} \right\rfloor + 4n - 4$.

Dokaz. Primetimo da ivična polja nemaju po četiri suseda unutar posmatranog kvadrata, što znači da ta polja, njih $4n-4$, moraju biti crna. Takođe primetimo da ukoliko na početku postoji pravougaonik dimenzija 2×1 u kome su oba polja bela, tada nijedno od njih nikada neće postati crno (jer je za oba istovremeno potrebno da im sused bude crn u prethodnoj iteraciji). Ako unutrašnji kvadrat dimenzija $(n-2)\times(n-2)$ podelimo na pravougaonike dimenzija 2×1 (za neparno n jedno polje ostaje nepokriveno), na osnovu prethodnog zapažanja sledi da u svakom takvom pravougaoniku mora da postoji bar jedno crno polje. Kako tih pravougaonika ima $\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{2} \right\rfloor$ možemo zaključiti da je $M(A_4, n) \ge \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{2} \right\rfloor + 4n - 4$. Primer početne konfiguracije za koju se jednakost dostiže dat je na slici 3: u parnim redovima bojimo ćelije na neparnim mestima, a u neparnim redovima ćelije na parnim mestima pri čemu su polja na obodu crna. $\square$



Slika 3.
A_4 automat

Figure 3.
A_4 automaton

Teorema 5. $M(A'_k, n) = k$ za $k \le 3$.

Dokaz. Slično kao u slučaju 4-susedstva, kada je $k = 1$, belo polje da bi postalo crno mora da ima bar jednog obojenog suseda, a koje god polje da obojimo na početku posle konačno mnogo iteracija cela tabla će biti obojena.

Ako je $k = 2$, da bi polje iz stanja 0 prešlo u stanje 1, potrebno je da ima bar dva suseda u stanju 1, dakle minimalan broj polja je 2. Primetimo da ukoliko obojimo bilo koja dva susedna crna polja, posle konačno mnogo iteracija cela tabla će biti obojena.

Za $k = 3$, da bi polje iz stanja 0 prešlo u stanje 1, potrebno je da ima bar tri obojena suseda, što znaci da je minimalan broj crnih polja 3. Uočimo da ukoliko na početku obojimo tri polja sa koordinatama (a, b), $(a, b-1)$ i

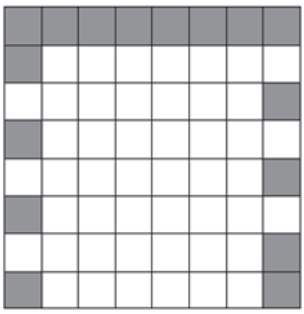
$(a, b+1)$, za proizvoljno a i b, posle konačno mnogo iteracija cela tabla će biti obojena. □

Lema 1. Da bi se u nekom automatu u kome polje prelazi iz stanja 0 u 1 ako ima bar 4 obojena suseda (nije bitno da li može da se vrati u stanje 0) sa 8-susedstvom obojila podtabla dimenzija $n \times n$ potrebno je da u svakom pravougaoniku dimenzija $n \times 2$ postoji bar jedna crna ćelija.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka postoji pravougaonik dimenzija $n \times 2$ u kome nema crnih ćelija. Posmatrajmo najgori slučaj, kada su sve ćelije van tog pravougaonika, a unutar posmatranog kvadrata u stanju 1. Primetimo da ni jedna ćelija unutar tog pravougaonika nema četiri crna suseda, niti će ih ikada imati. Dakle, da bi se obojila sva polja u tom pravougaoniku potrebno je da postoji bar jedno polje crne boje unutar njega, čime smo dokazali tvrđenje. □

Teorema 6. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq M(A'_4, n) \leq 2n$.

Dokaz. Ako podelimo posmatrani kvadrat na pravougaonike dimenzija $n \times 2$, na osnovu leme 1 imamo da u svakom od tih pravougaonika mora da postoji bar jedno polje crne boje. Kako tih pravougaonika ima $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, znamo da na početku moramo imati bar toliko crnih polja da bi se obojila cela tabla, tj. $M(A'_4, n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Gornje ograničenje dobijeno je iz kontrukcije (slika 4). □



Slika 4.
A'_4 automat

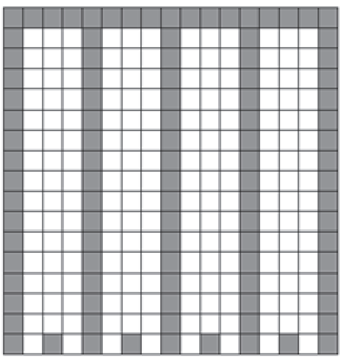
Figure 4.
A'_4 automaton

Lema 2. Da bi se u nekom automatu u kome polje prelazi iz stanja 0 u 1 ako ima bar 5 obojenih suseda (nije bitno da li može da se vrati u stanje 0) sa 8-susedstvom obojio neki kvadrat dimenzija 7×7, potrebno je da bar četiri polja u tom kvadratu budu crna.

Dokaz. Puštajući program koji traži minimalan broj polja potreban da se oboji podtabla 7×7 ako su oko njega sva obojena polja, dolazimo do dokaza leme da u takvom kvadratu mora biti bar 4 obojena polja. Program prolazi koz sve moguće rasporede obojenih ćelija (počevši od 1 obojene) u podtabli dimenzija 7×7 u najgorem mogućem slučaju tj. pod pretpostavkom da je podtabla okružena obojenim ćelijama. Program simulira rad celularnog automata dok se ne dobije struktura koja se ne menja ili koja se periodično menja. Ukoliko se tabla ne oboji cela za sve rasporede k obojenih ćelija, program posmatra zatim sve kombinacije $k + 1$ obojene ćelije. Minimalan broj polja za koje je program uspeo da oboji celu podtablu je 4, odakle sledi dokaz prethodne leme. □

Teorema 7. $4\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor^2 \leq M(A_5', n) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor (n-2) + 3n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Dokaz. Donje ograničenje sledi iz leme 2 koja nam pokazuje da u svakom kvadratu 7×7 u A_5 CA mora da bude bar četiri crna polja. Gornje ograničenje sledi iz konstrukcije sa slike 5. Konstrukcija izgleda tako što posle svake obojene kolone idu tri bele, prva vrsta je skroz obojena, a u poslednjoj vrsti svako drugo polje – odatle imamo $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor (n-2) + n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. U zavisnosti od ostatka pri deljenju broja n sa 4, moramo dodati jos jednu do dve crne kolone. U slučaju kada je n deljivo sa 4 moramo dodati još jednu kolonu na kraju, a u svim ostalim slučajevima moramo dodati još po dve crne kolone, pa je gornje ograničenje $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor (n-2) + 3n + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. □



Slika 5.
A_5' automat

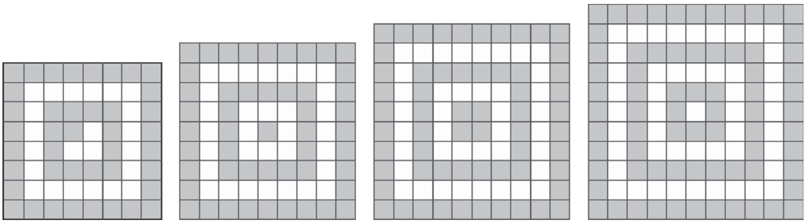
Figure 5.
A_5' automaton

Lema 3. Da bi se u nekom automatu u kome polje prelazi iz stanja 0 u 1 ako ima bar 6 obojenih suseda (nije bitno da li može da se vrati u stanje 0) obojila podtabla dimenzija 2×2, potrebno je da bar jedno od ta četiri polja bude obojeno.

Dokaz. Ako pretpostavimo da su svi susedi oko te podtable obojeni, svako polje će imati tačno 5 obojenih suseda, što nije dovoljno za bojenje bilo kog polja unutar podtable, odnosno da bi se cela podtabla obojila, potrebno je da bar jedno polje iz podtable bude obojeno. □

Teorema 8. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \leq M(A_6', n) \leq \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil + n.$

Dokaz. Pošto iz prethodno navedene leme sledi da u svakom kvadratu 2×2 mora da postoji bar jedno obojeno polje, minimalan broj polja mora biti bar $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2$. Gornje ograničenje dobijamo iz konstukcije sa slike 6. Primetimo



Slika 6. A_6' automat

Figure 6. A_6' automaton

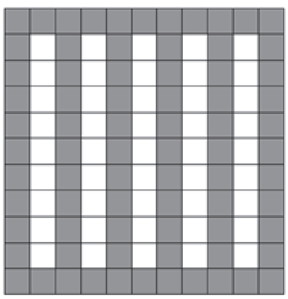
da počevši od druge vrste od gore, pa do sredine podtable važi da i-ti red i $(i+1)$-ti red zajedno imaju tačno n crnih polja, za svako parno i, a isto važi i kada krenemo od dole. Tako đe, prva i poslednja kolona su obojene u celosti, odnosno imaju po n crnih polja. U zavisnosti od ostatka koji broj n daje pri deljenju sa 4, razlikujemo nekoliko sličajeva. Ako je n paran broj, konstrukcija sadrži $\frac{n^2}{2}+n$ crnih polja, s tim da u situaciji kada n daje ostatak 2 pri deljenju sa 4, moramo dodati još jedno crno polje u sredini, kao na slici 6. Ako je $n \equiv 1 \pmod 4$, gornje ograničenje je $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, dok ako je $n \equiv 3 \pmod 4$, ograničenje je $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. □

Lema 4. U svakom kvadratu dimenzija 2×2 u nekom automatu u kome polje prelazi iz stanja 0 u 1 ako ima bar 7 obojenih suseda (nije bitno da li može se vrati u stanje 0), moraju da postoje bar dva crna polja da bi se obojila sva polja u tom kvadratu.

Dokaz. Posmatrajmo kvadrat dimenzija 2×2 koji nema crnih ćelija. Primetimo da svaka ćelija unutar tog kvadrata ima tačno 5 suseda van njega, što znači da može imati najviše 5 crnih suseda. Da bi neka od tih ćelija promenila stanje mora da ima bar još dva crna suseda. Dakle, u tom kvadratu moraju da postoje bar dve crne ćelije. □

Teorema 9. $4n-4+2\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^2 \leq M(A_7', n) \leq 4n-4+\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{2} \right\rfloor$.

Dokaz. Primetimo da ćelije na obodu imaju najviše 5 suseda unutar kvadrata, što znači da one moraju biti obojene. Dalje, ako unutrasnji kvadrat dimenzija $(n-2)\times(n-2)$ podelimo na kvadrate dimenzija 2×2 na osnovu leme 4 znamo da u svakom od tih kvadrata mora da postoji bar dve



Slika 7. A_7' automat.

Figure 7. A_7' automaton

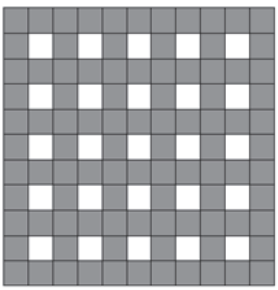
crne ćelije. Kako tih kvadrata ima $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^2$, a ivičnih ćelija ima $4n-4$, imamo da je $M(A'_7, n) \geq 4n-4+2\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor$. Gornja granica sledi iz konstrukcije (slika 7). □

Lema 5. U nekom automatu u kome polje prelazi iz stanja 0 u 1 ako ima bar 8 suseda (nije bitno da li može da se vrati u stanje 0) u svakom kvadratu 2×2 moraju biti obojena bar tri polja, da bi se obojila sva polja tog kvadrata.

Dokaz. Pošto svi susedi nekog belog polja moraju biti obojeni da bi ono promenilo svoje stanje, u svakom kvadratu 2×2 samo jedno polje može biti belo na početku (pod uslovom da su okolo sva obojena polja), jer se u suprotnom ne bi obojio ceo taj kvadrat. □

Teorema 10. $3\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^2 + 4n-4 \leq M(A'_8, n) \leq 3\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^2 + 5n-5.$

Dokaz. Primetimo da ćelije na obodu nikada ne mogu imati 8 crnih suseda, pa one moraju biti crne na početku. Iz leme 5 sledi da u svakom kvadtratu 2×2 moraju biti bar tri obojena polja. Ako podelimo unutrašnji kvadrat dimenzija $(n-2)\times(n-2)$ na kvadrate 2×2 imamo da je minimalan broj obojenih polja jednak $3\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^2 + 4n-4$. Pošto postoji konstrukcija sa $3\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor^2 + 5n-5$ crnih polja, sledi da je to gornje ograničenje. Primer ove konstrukcije dat je na slici 8. □



Slika 8.
A'_8 automat

Figure 8.
A'_8 automaton

B_k i B'_k automati

Posmatrajmo prvu varijaciju klasičnih 2D CA – CA na torusu. Podsetimo se da definicija ovih varijacija nije u skladu sa definicijom 1 celularnog automata, već sa pomenutim uopštenjem ove definicije.

Definicija 4. Neka je n prirodan broj. B_k automat veličine n je CA sa skupom polja $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}\times\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ u kome svako polje

(x, y) ima 4 suseda: $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y-1)$, $(x, y+1)$ pri čemu se pomenute operacije gledaju po modulu n (4-susedstvo). Svako polje ovog automata može biti u dva stanja (crno ili belo) pri čemu 1) belo polje prelazi u crno ako ima bar k crnih suseda; 2) crno polje postaje belo ako ima manje od k crnih suseda.

B'_k automat je CA analogan automatu B_k, s tim što je B'_k sa (odgovarajućim) 8-susedstvom.

B_k i B'_k automati su zapravo konačne crno-bele table $n \times n$ na torusu (prva i poslednja vrsta su susedne, kao i prva i poslednja kolona). Analogni su automatima A_k i A'_k, redom, uz dodatno pravilo o 'poništavanju' crnih polja. Motivacija za postavljanje na torus su granični uslovi – posmatranjem klasične podtable sa modifikovanim pravilom dovelo bi do trivijalnih rezultata jer bi se ugaona/ivična polja uvek vraćala na belo za veće vrednosti k.

Koristimo oznaku $M(B_k, n) = M(B_k, \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, 2, \ldots, n-1\})$, gde je n veličina automata B_k (analogno i $M(B'_k, n)$).

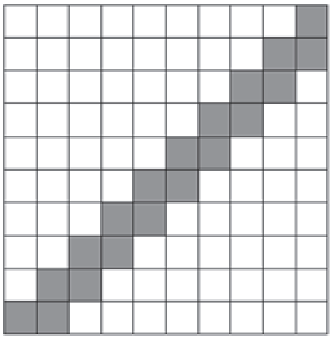
Teorema 11. $M(B_1, n) = 2$, za $2|n$, odnosno $M(B_1, n) = 1$, za $2 \nmid n$.

Dokaz. Posmatrajmo jednu kolonu table. Neka se crno polje nalazi na koordinati x. U sledećem koraku to polje se gubi, ali se pojavljuju polja na koordinatama $x-1$ i $x+1$. Primetimo da su koordinate ta dva polja iste parnosti. Ovaj postupak se ponavlja za svako novo dobijeno polje sve dok se ne oboji bar jedno od ivičnih polja, pritom polja koja su obojena imaju koordinate iste parnosti. Kada je n neparno, obojiće se oba ivična polja, jer su iste parnosti, i ona se u narednom koraku neće obrisati jer su to dva susedna polja (CA na torusu). Zatim će se u konačno mnogo koraka obojiti cela kolona, pa zaključujemo da je za neparno n, $M(B_1, n) = 1$. U suprotnom, ivična polja će biti različite parnosti, što znači da se nikad neće pojaviti dva susedna polja koja su u stanju 1, odnosno nikad se neće obojiti cela kolona. Kako ovo može da se primeni na svaku vrstu i kolonu, zaključujemo da se za parno n ne može obojiti cela tabla sa samo jednim početnim poljem u stanju 1. U tom slučaju dovoljno je obojiti dva proizvoljna susedna polja, tj. $M(B_1, n) = 2$. □

Teorema 12. $n \le M(B_2, n) \le 2n-1$.

Dokaz. Pretpostavimo da je minimalan broj polja t. Neka je obim svih polja O. Pošto su polja kvadratnog oblika, sledi da $O \le 4t$. Slično kao kod A_2 automata, uočimo da ako belo polje ima tačno dva crna suseda, kada promeni boju, obim se neće promeniti. Ako belo polje ima više od dva crna suseda, u sledećem koraku obim će se smanjiti. Dalje, ako crno polje ima jednog crnog suseda, kada promeni boju, obim će se smanjiti za 2, a ako nema crnih suseda, smanjiće se za 4. Dakle, možemo zaključiti da se obim nikada ne povećava. Kada se oboje sva polja, obim figure iznosi $4n$, pa zaključujemo da mora da važi $O \ge 4n$. Iz $4t \ge O \ge 4n$ vidimo da je minimalna vrednost za t upravo $t = n$, a gornje ograničenje sledi iz konstrukcije (slika 9). □

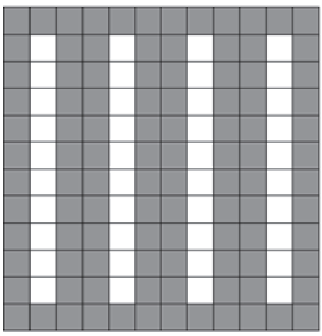
Teorema 13. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \le M(B_3, n) \le \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \cdot (2n+2) + (n \bmod 3) \cdot n.$



Slika 9.
B_2 automat

Figure 9.
B_2 automaton

Dokaz. Posmatrajmo kvadrat dimenzija 2×2. Svaka ćelija unutar tog kvadrata ima tačno 2 suseda van njega. Ukoliko u tom kvadratu ne postoji nijedna crna ćelija, on se nikada neće obojiti, jer svaka ćelija može imati najviše dva crna suseda. Dakle, u svakom kvadratu dimenzija 2×2 mora da postoji bar jedna crna ćelija, odakle vidimo da je donje ograničenje u ovom slučaju $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2$. Gornje ograničenje sledi iz kontrukcije sa slike 10. Prva kolona je susedna sa poslednjom (CA je na torusu) i prva vrsta je susedna sa poslednjom, pa se one neće brisati. Ako n nije deljiv sa 3, u zavisnosti od ostatka potrebno je dodati još jednu ili dve obojene kolone. □



Slika 10.
B_3 automat

Figure 10.
B_3 automaton

Teorema 14. $M(B_4, n) = n^2$.

Dokaz. Da bi neka ćelija ostala u stanju 1 svi njeni susedi moraju da budu u stanju 1. Pošto svi susedi svake ćelije moraju biti u stanju 1 možemo zaključiti da sve ćelije moraju biti u stanju 1. Primetimo da ukoliko postoji neka bela ćelija, u sledećem koraku svi njeni susedi postaju beli. Ukoliko su svi njeni susedi crni ona postaje crna, a pojavljuje se 4 nove bele. U suprotnom, ona ostaje bela, a njeni susedi koji su bili crni postaju beli. Dakle, broj belih polja se nikada ne smanjuje, iz čega sledi da je $M(B_4, n) = n^2$. □

Teorema 15. $M(B_1', n) = 1$.

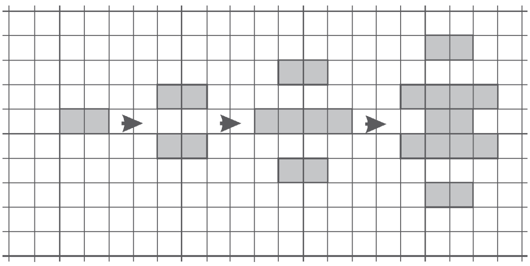
Dokaz. Primetimo da koje god polje na početku da stavimo u stanje 1, u prvom koraku će svi njegovi susedi postati crni, a ono će se vratiti u stanje 0. U sledećem koraku se ni jedna od postojećih crnih ćelija neće izbrisati, a pojaviće se nove crne ćelije. U svakom sledećem koraku će se pojavljivati nove crne ćelije što znači da će se posle nekog vremena obojiti cela tabla. □

U nastavku je definisan pojam kompaktne strukture koji ćemo koristiti u narednom dokazu.

Definicija 5. Kompaktna struktura je struktura sačinjena od ćelija u celularnom automatu koja se ni u jednom narednom koraku (iteraciji) neće smanjiti, odnosno sve ćelije koje su prvobitno činile stukturu su i dalje njen deo.

Teorema 16. $M(B_2', n) = 2$.

Dokaz. Postavimo na početku dva susedna crna polja kao na slici 11. Primetimo da se u četvrtoj iteraciji u sredini pojavljuje kompaktna struktura. Kako se takva struktura nikada ne smanjuje, od nje u svakom sledećem koraku nastaju nove crne ćelije. Dakle, posle konačno mnogo poteza cela tabla će postati crna. □

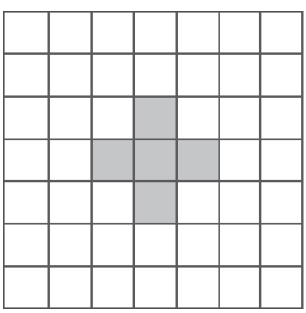


Slika 11. B_2' automat

Figure 11. B_2' automaton

Teorema 17. $M(B_3', n) = 5$.

Dokaz. Na početku možemo imati najmanje 3 obojena polja. Ali kako se sva tri polja u narednom koraku gube (jer imaju najviše dva suseda), a pojave se najviše dva nova obojena polja, primetimo da ne postoji konstrukcija gde u početnom trenutku budu obojena tačno 3 polja koja preživi duže od 2 iteracije. Iz ovoga sledi da na početku moraju da budu obojena bar 4 polja. Primetimo ako na početku imamo tačno 4 polja u stanju 1, u drugom koraku na tabli mogu biti najviše 4 obojena polja. Jedini slučajevi kada u drugom koraku imamo 4 obojena polja su kvadrat 2×2 (što je očigledno da se ne menja, te ne može obojiti tablu) i obojena tri susedna polja i polje iznad srednjeg kvadrata (i sve ekvivalentne figure dobijene



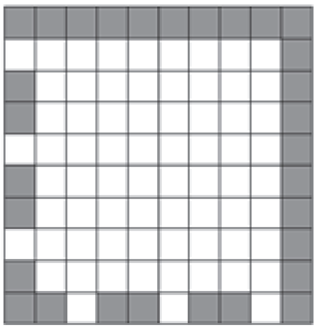
Slika 12. B_3' automat

Figure 12. B_3' automaton

rotacijom), ali ni ova kontrukcija ne boji celu tablu. Kako smo dokazali da sa tri obojena polja ne može da se oboji cela tabla, sledi da je potrebno bar 5 polja. Primer konstrukcije sa 5 polja vidimo na slici 12. □

Teorema 18. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq M(B'_4, n) \leq \frac{10n-10}{3}$.

Dokaz. U svakoj traci dimenzija $2 \times n$ mora postojati bar jedno crno polje (inače će sva polja te trake uvek biti bela jer mogu imati najviše 3 crna suseda), pa je donje ograničenje $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Gornje ograničenje dobijamo konstrukcijom sa slike 13. Primetimo da je prikazana struktura kompaktna i da će se svaki red sigurno obojiti nakon nekog vremena. □



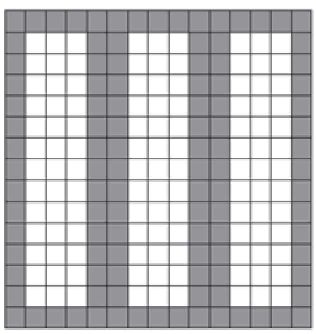
Slika 13. B'_4 automat

Figure 13. B'_4 automaton

Teorema 19.

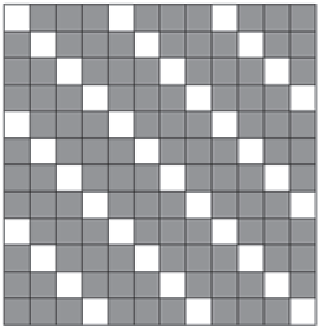
$$4\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor^2 \leq M(B'_5, n) \leq \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \cdot (2n-4) + 2n + (n \bmod 5) \cdot (n-2).$$

Dokaz. Na osnovu leme 2 znamo da u svakom kvadratu dimenzija 7×7 mora da postoji bar 4 crna polja, pa je donje ograničenje $4\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor^2$. Gornje ograničenje sledi iz konstrukcije (slika 14). Konstrukcija je slična kao kod A_5 automata, samo su kolone duple i zbog toga ne dolazi do brisanja ćelija. Ako n nije deljivo sa 5, potrebno je dodati još kolona koje će biti cele obojene. □



Slika 14. B'_5 automat

Figure 14. B'_5 automaton



Slika 15. B_6' automat

Figure 15. B_6' automaton

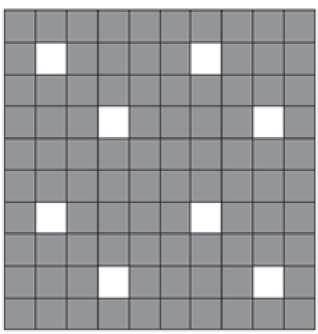
Teorema 20. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 \leq M(B_6', n) \leq \left\lceil \frac{3n^2}{4} \right\rceil$.

Dokaz. Donje ograničenje sledi iz leme 3, gde vidimo da u svakom kvadratu dimenzija 2×2 mora biti obojeno bar jedno polje. Gornje ograničenje je dobijeno iz konstrukcije (slika 15). Konstrukciju dobijamo tako što ne obojimo glavnu dijagonalu, a posle nje se naizmenično smenjuju tri obojene, pa jedna bela dijagonala. □

Teorema 21.

$$3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2 \leq M(B_7', n) \leq 23\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor^2 + 2(n \bmod 5)\cdot n - (n \bmod 5)^2 .$$

Dokaz. Uočimo da u svakom kvadratu dimenzija 2×2 u nekom B_7' automatu moraju da postoje bar 3 crne ćelije da bi se obojio taj kvadrat. Posmatrajmo tablu gde postoji kvadrat 2×2 sa 2 bela i 2 crna polja i neka su sva ostala polja obojena. Primetimo da su u tom kvadratu svakom polju sva ostala polja iz njega susedi. Dakle, ako postoje 2 bela polja, vidimo da crna polja imaju bar dva bela suseda što znači da se brišu. Kako u nekom koraku može da se pojavi najviše dva crna polja (ona koja su bila bela), a znamo da se postojeća dva crna polja brišu, možemo zaključiti da se taj kvadrat nikada neće obojiti. Dakle, u svakom takvom kvadratu mora da postoji bar 3 crna polja. Iz ovoga sledi da traženi broj mora biti bar $3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2$. Gornje ograničenje dobijeno je iz konstrukcije sa slike 16, gde vidimo da u svakom kvadratu 5×5 postoji tačno dve prazne ćelije, tj. ima 23 obojene, što je



Slika 16. B_7' automat

Figure 16. B_7' automaton

$23\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor^2$ obojenih ćelija. Ostale ćelije kojih ima $2(n \bmod 5)\cdot n-(n \bmod 5)^2$, tako đe obojimo i dobijemo gornju granicu. □

Teorema 22. $M(B_8', n) = n^2$.

Dokaz. Slično kao kod B_4 automata, da bi polje ostalo crno svi njegovi susedi moraju da budu crni. Ako su svi susedi svakog polja crni, sva polja na tabli moraju biti crna. □

Heksagonalni i trougaoni automati

Prethodno posmatrane probleme je prirodno proširiti i na druge beskonačne mreže, ne samo one sastavljene od kvadrata. Poznato je da ukoliko se ravan može pravilno popločati podudarnim pravilnim mnogouglovima, tada ti mnogouglovi mogu biti samo kvadrat, jednakostranični trougao i pravilni šestougao. Smatramo da su dva mnogougla (polja u nekom CA) susedna ukoliko imaju zajedničku stranicu. Sledeće definicije prirodno slede.

Definicija 6. (Heksagonalni) C_k automat je CA čija su polja pravlini šestouglovi iz zadatog pravilnog popločavanja ravni; svako polje je crno ili belo; belo polje postaje crno akko ima bar *k* crnih suseda dok crno polje uvek ostaje crno.

U heksagonalnim automatima traka dimenzija $a\times 1$ je skup od a uzastopnih šestouglova pri čemu njihovi centri leže na istoj pravoj. Dve trake dimenzija $a\times 1$ su susedne ako je svaki šestougao jedne trake susedan bar sa jednim šestouglom druge trake. Podtabla (traka) dimenzija $a\times b$ (u oznaci $C_{a\times b}$) je skup od $a\times 1$ traka pri čemu su svake dve uzastopne od njih susedne (podtabla je zapravo romb sastavljen od šestouglova). Definišemo $M(C_k, n) = M(C_k, C_{n\times n})$.

Definicija 7. (Trougaoni) T_k automat je CA čija su polja jednakostranični trouglovi iz zadatog pravilnog popločavanja ravni; svako polje je crno ili belo; belo polje postaje crno akko ima bar *k* crnih suseda dok crno polje uvek ostaje crno.

U trougaonim automatima podtabla dimenzija $n\times n$ (u oznaci $T_{n\times n}$) je skup od n^2 trouglova koji čine veliki jednakostraničan trougao stranice *n*. Definišemo $M(T_k, n) = M(T_k, T_{n\times n})$.

C_k automati

Teorema 23. $M(C_1, n) = 1$.

Dokaz. Slično kao i u prethodnim slučajevima gde je *k* = 1, da bi se nešto obojilo na početku, mora da postoji bar jedna ćelija crne boje. Dalje, dok postoje dve ćelije različitih stanja na tabli, postojaće i dve susedne ćelije različitog stanja, što znači da će se pri svakoj iteraciji pojaviti bar jedna crna ćelija sve dok se ne oboji cela tabla. □

Teorema 24. $M(C_2, n) = 2$.

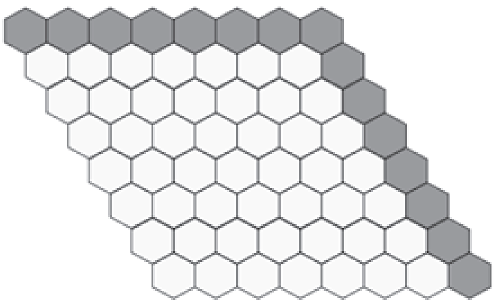
Dokaz. Da bi se pojavila bilo koja nova crna ćelija, potrebno je da postoje bar dve crne ćelije na tabli. Primetimo da ako na početku obojimo bilo koje dve ćelije sa bar jednim zajedničkim susedom, posle konačno mnogo poteza obojiće se cela tabla. □

Lema 6. U svakoj traci dimenzija $2 \times n$ u nekom C_3 automatu mora da se nađe bar jedna crna ćelija, da bi se posle konačno mnogo poteza obojila cela ta traka.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka postoji takva traka bez ijedne crne ćelije. Primetimo da svaka ćelija iz trake ima najviše 2 suseda van trake, što znači da može imati najviše 2 crna suseda. Pošto to nije dovoljno da se pojavi crno polje unutar trake, u traci mora da postoji bar jedno crno polje. □

Teorema 25. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le M(C_3, n) \le 2n-1$.

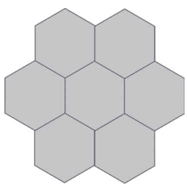
Dokaz. Ako datu tablu dimenzija $n \times n$ podelimo na trake $n \times 2$, na osnovu leme 6 imamo da je $M(C_3, n) \ge \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Gornja granica dobijena je konstrukcijom sa slike 17. □



Slika 17. C_3 automat

Figure 17. C_3 automaton

Lema 7. U nekom C_4 automatu, u svakoj figurici sa slike 18 mora da postoji bar jedna obojena ćelija da bi se obojila cela ta figurica.



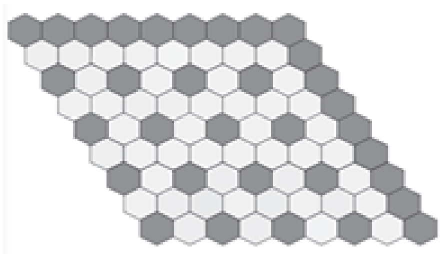
Slika 18. Cvetić

Figure 18. Flower

Dokaz. Posmatrajmo takvu figuricu koja nema crnih polja. Primetimo da ćelije unutar te figurice imaju najviše tri suseda van nje, odnosno imaju najviše tri crna suseda, što nije dovoljno za novo bojenje. Dakle, kako bi se obojila figurica, unutar nje mora da postoji bar jedna crna ćelija. □

Teorema 26. $\left\lfloor \frac{n^2-8n}{7} \right\rfloor \le M(C_4, n) \le 2n-1+\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil^2$.

Dokaz. Primetimo da ravan možemo da popolčamo cvetićima. Dakle, unutrašnjost posmatrane table sigurno možemo da popločamo cvetičima. Kako cvetić zauzima 3 vrste i 3 kolone, možemo zaključiti da najviše dve vrste, odnosno kolone uz svaku ivicu ne možemo da popločamo. Dakle, ukoliko podelimo posmatranu podtablu na cvetiće pomenutom metodom, može da ostane najviše $8n$ ćelija koje nisu raspodeljene, odnosno ne pripadaju nijednom cvetiću. Na osnovu leme 7 znamo da u svakom cvetiću od 7 ćelija mora da postoji bar jedna ćelija u stanju 1, pa stoga važi $M(C_4, n) \ge \left\lfloor \frac{n^2-8n}{7} \right\rfloor$. Gornje ograničenje dobijamo iz konstrukcije sa slike 19. □



Slika 19.
C_4 automat

Figure 19.
C_4 automaton

Lema 8. Neka je F figurica od 3 šestougla takva da je svaki šestougao sused preostalim šestouglovima. U svakoj figurici F u nekom C_5 automatu mora da postoji bar jedna ćelija u stanju 1 da bi se obojila cela ta figurica.

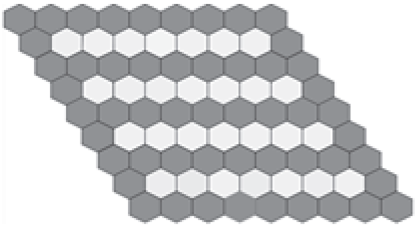
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da su sva polja neke figurice F bela. Primetimo da svaka ćelija te figurice može imati najviše 4 crna suseda, jer ima tačno 4 suseda van te figurice. Drugim rečima, u svakoj figurici F mora da postoji bar jedna ćelija u stanju 1. □

Teorema 27.

$$\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2n-4}{3} \right\rfloor + 4n-4 \le M(C_5, n) \le 4n-4+\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor (n-2).$$

Dokaz. Lema 8 nam kaže da u svaka 3 polja raspoređena u F figurici mora da bude bar jedno obojeno. Primetimo da sva polja na ivici podtable moraju biti obojena jer nemaju dovoljan broj suseda untar podtable. Kako se u traci dimenzija $2 \times 3x$ nalazi tačno $2x$ ovakvih figurica, dobijena je donja granica $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2n-4}{3} \right\rfloor + 4n-4$. U slučajevima kada n nije deljivo sa tri, minimalan broj polja je strogo veći od donjeg ograničenja. Gornja granica sledi iz konstrukcije sa slike 20. □

Lema 9. U svakoj figurici F koja je sastavljena od 3 šestougla tako da je svaki šestougao sused preostalim šestouglovima, mora da postoji bar 2 polja u stanju 1 da bi se cela ta figurica obojila u nekom C_6 automatu. □



Slika 20.
C_5 automat

Figure 20.
C_5 automaton

Dokaz. Da bi bela ćelija promenila svoje stanje, svi njeni susedi moraju biti crni. Dakle, ukoliko postoji jedna bela ćelija u figurici F, svi njeni susedi moraju biti crni, a kako su preostale dve ćelije iz F njeni susedi, sledi da i one moraju biti crne da bi se ona obojila. □

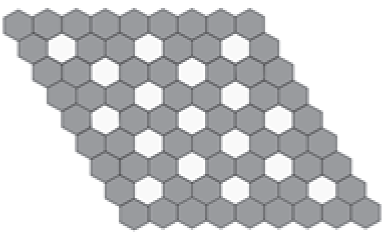
Teorema 28. $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2n-4}{3} \right\rfloor + 4n-4 \le M(C_6, n) \le \frac{3n^2}{4} + 2n-4.$

Dokaz. Primetimo da sve ćelije sa oboda moraju biti obojene jer nemaju dovoljno suseda unutar posmatrane podtable. Na osnovu leme 9 možemo zaključiti da u unutrašnjosti podtable mora da postoji bar $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2n-4}{3} \right\rfloor$ crnih ćelija, odnosno donje ograničenje broja M je $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{2n-4}{3} \right\rfloor + 4n-4$. Gornje ograničenje sledi iz konstrukcije sa slike 21. Primetimo da je konstrukcija napravljena tako što se u unutrašnjosti posmatrane podtable, u svakom redu, svako treće polje ostavi belo, ali sa određenim pomeranjem kao na slici. Kada $3|n$ imamo situaciju baš kao na slici 21. Primetimo da se broj crnih polja u tom slučaju može zapisati na sledeći način:

$$M(C_6, n) = 4n-4 + \left\lfloor \frac{2(n-2)}{3} \right\rfloor + 2\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil + \ldots + 2\left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2(n-2)}{3} \right\rfloor =$$

$$= 4n-4 + \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil \cdot \left\lfloor \frac{2(n-2)}{3} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil =$$

$$= 4n-4 + \frac{n}{3} \cdot \frac{2(n-3)}{3} + 2 \cdot \frac{n-3}{3} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{2n}{3}(n-3) + 4n-4 .$$



Slika 21.
C_6 automat

Figure 21.
C_6 automaton

U drugom slučaju, kada je $n \equiv 1 \pmod 3$, na sličan način dolazimo do gornjeg ograničenja:

$$M(C_6, n) = 4n - 4 + 2\left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil \cdot \left\lfloor \frac{2(n-2)}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{2(n-2)}{3} \right\rceil =$$

$$= 4n - 4 + 2 \cdot \frac{n-1}{3} \cdot \frac{2(n-4)}{3} + 2 \cdot \frac{n-4}{3} \cdot \frac{2(n-1)}{3} =$$

$$= \frac{2(n-1)}{3} \cdot (n-4) + 4n - 4.$$

U poslednjem slučaju kada je $n \equiv 2 \pmod 3$, imamo da $3 \mid n-2$, pa je gornja granica jednaka $\frac{2(n-2)^2}{3} + 4n - 4$. □

T_k automati

Teorema 29. $M(T_1, n) = 1$.

Dokaz. Kao i u prethodnim slučajevima gde je $k = 1$, dok na tabli postoje polja različitih stanja, postojaće i susedna polja različitih stanja, te će se u svakom koraku pojavljivati bar jedno crno polje sve dok se cela tabla ne oboji. □

Lema 10. U svakom šestouglu koji sadrži šest ćelija u nekom automatu T_2 mora da postoji bar jedna crna ćelija da bi se obojio taj šestougao.

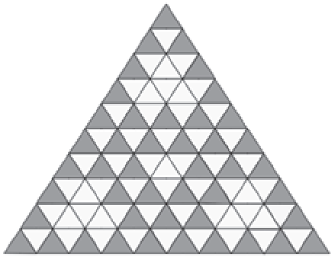
Dokaz. Primetimo da svako polje iz takvog šestougla ima tačno po jednog suseda van njega. To nam govori da sva njegova polja mogu imati samo po jednog crnog suseda izvan šestougla, a to nije dovoljno za stvaranje novih crnih ćelija. Dakle, u svakom šestouglu mora da postoji bar jedno crno polje. □

Teorema 30.

$$\left\lfloor \frac{n^2 - 6n}{6} \right\rfloor \le M(T_2, n) \le \frac{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1 \right)}{2} \cdot 12 + \frac{\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - 1 \right)}{2} \cdot 9 +$$

$$+ n(n \bmod 5) + \frac{(n \bmod 5) \cdot \left((n \bmod 5) + 1\right)}{2}.$$

Dokaz. Primetimo da možemo popločati ravan šestouglovima, tako da ne postoje rupe izme đu njih. Dakle, možemo popločati unutrašnjost posmatrane podtable. Kako šestouga može da zauzima najviše dva reda uz svaku ivicu, možemo zaključiti da najviše $2n$ ćelija iz po jednog reda uz svaku ivicu ne može da se poploča. Ukoliko podelimo podtablu na šestouglove na gore pomenut način, najviše $6n$ ćelija može da bude neraspodeljeno, odnosno da ne bude ni u jednom šestouglu. Na osnovu leme 10 znamo da u svakom šestouglu mora da postoji bar po jedna crna ćelija, pa dolazimo do donje granice $\left\lfloor \frac{n^2 - 6n}{6} \right\rfloor$. Gornje ograničenje sledi iz konstrukcije sa slike 22. Trougao se podeli na podtrouglove stranice 5 i u svakom usprvanom trouglu boje se spoljašnja polja, kojih ima 12, a u svakom obrnutom trouglu dovoljno je obojiti 9 polja kao na slici 22. □

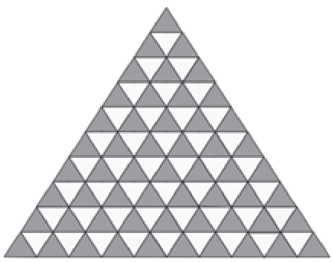


Slika 22.
T_2 automat

Figure 22.
T_2 automaton

Teorema 31. $M(T_3, n) = \frac{n^2 + n}{2}$.

Dokaz. Neka je t minimalan broj polja koja moraju biti u stanju 1 na početku i neka je obim svih polja O. Kako su polja u obliku trougla, sledi da je $O \leq 3t$. Primetimo da belo polje mora da ima tri crna suseda da bi se obojilo, a svojim bojenjem smanjuje obim za tačno 3. Kako belih polja ima $n^2 - t$, kada se oboji cela tabla obim će biti jednak $3t - 3(n^2 - t)$. Pošto je krajnji obim jednak $3n$ imamo da je $3t - 3(n^2 - t) \geq 3n \Rightarrow t \geq \frac{n^2 + n}{2}$. Na slici 23 je prikazana konstrukcija sa tačno $\frac{n^2 + n}{2}$ polja koja boji celu tablu. Obojena su sva uspravna polja, a njih ima $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$. □



Slika 23.
T_3 automat

Figure 23.
T_3 automaton

Bojenje beskonačne table

Do sada je analizirana vrednost broja $M(A, P)$ za različite podtable P konačnih dimenzija. U ovoj glavi razmatramo slučaj kada je P zapravo skup svih polja nekog beskonačnog automata, tj. pitamo se da li je moguće postaviti konačno mnogo crnih polja u nekom automatu tako da se posle beskonačno mnogo iteracija oboji cela tabla.

Definicija 8. Neka je A crno-beli CA. Polje x automata A zovemo obojivo u odnosu na datu početnu konfiguraciju automata A ako postoji prirodan broj n_x takav da je polje x crne boje u i-toj iteraciji za sve $i \geq n_x$. Ukoliko postoji početna konfiguracija automata A takva da je svako njegovo polje obojivo u odnosu na tu konfiguraciju, tada kažemo da je A obojiv.

Definicija 9. Neka je A crno-beli CA. Sa $M(A)$ označavamo najmanji prirodan broj n takav da postoji početna konfiguracija sa tačno n crnih polja u odnosu na koju je A obojiv. Ukoliko takav prirodan broj n ne postoji, tada pišemo $M(A) = \infty$.

Dakle, $M(A)$ je najmanji broj crnih polja u početnoj konfiguraciji automata A, počevši od koje ceo CA A postaje crn nakon beskonačno iteracija. Sledeća teorema je vrlo prirodna:

Teorema 32. Neka je A crno-beli 2D CA.

a) Ukoliko postoji prirodan broj C takav da je $M(A, n) \leq C$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $M(A) \leq C$.

b) Ukoliko je $M(A, n+1) > M(A, n)$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $M(A) = \infty$.

Dokaz. Deo a): pretpostavimo suprotno, neka je $M(A) > C$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$, za koje je $M(A, n) > C$, što dovodi do kontradikcije.

Deo b): pretpostavimo suprotno, $M(A) = C \in \mathbb{N}$. Kako je $f(n) = M(A, n)$ strogo rastuća funkcija, postoji $n \in \mathbb{N}$, takvo da je $f(n) = M(A, n) > C$. To znači da je datu podtablu $n \times n$ nemoguće obojiti u crno sa C početnih crnih polja, a samim tim ni celu tablu. □

Teorema 33. $M(A_k) = \infty$ za $k > 1$ i $M(A'_k) = \infty$ za $k > 3$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da takav automat može da se širi beskonačno za početnu konfiguraciju sa konačno mnogo crnih polja. Za proizvoljnu početnu konfiguraciju, posmatrajmo dovoljno veliki kvadrat koji sadrži sva polja te konfiguracije. Kako se automat širi beskonačno, u nekom trenutku će se sigurno pojaviti crno polje van tog kvadrata. Obeležimo sa t prvo polje van tog kvadrata koje će postati crno. Pošto pre bojenja polja t nije postojalo nijedno crno polje van pomenutog kvadrata, znamo da to polje može imati crne susede samo unutar istog. Kako to polje može imati najviše jednog suseda unutar kvadrata u slučaju A_k automata, odnosno 3 u slučaju A'_k automata, zaključujemo da to polje nikada neće postati crno. Došli smo do kontradikcije, što znači da će se automat završiti posle konačno mnogo iteracija. □

Prethodnu teoremu možemo uopštiti.

Teorema 34. Neka je A crno-beli 2D CA u kome belo polje postaje crno akko ima bar k crnih suseda, dok crno polje uvek ostaje crno. Neka je m najveći broj suseda koje može imati polje ovog automata u nekoj poluravni u kojoj se to polje ne nalazi. Ukoliko je $m < k$ tada je $M(A) = \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno – neka se takav automat širi beskonačno za početnu konfiguraciju sa konačno mnogo crnih polja. Uočimo kvadrat, takav da su sva crna polja početne konfiguracije unutar njega. Pošto se automat beskonačno širi, možemo zaključiti da će se u nekom trenutku sigurno pojaviti crno polje van tog kvadrata. Označimo prvo takvo polje sa t. Polje t može imati crne susede samo unutar kvadrata, jer pre njega nisu postojala crna polja van kvadrata, a po uslovu teoreme znamo da takvih suseda ima najviše m. Kako je $m < k$ polje nikada neće postati crno, tj. dolazimo do kontradikcije. □

Literatura

Kari J. 2004. Theory of cellular automata: A survey. *Theoretical Computer Science*, **334**: 3.

Sloane N. J. A. 2015. On the Number of ON Cells in Cellular Automata. The OEIS Foundation. Dostupno na: https://arxiv.org/pdf/1503.01168.pdf

Wolfram S. 1984. Universality and complexity in Cellular Automata. *Physica D: Nonlinear phenomena*, **10**: 1.

Milica Maksimović and Milena Jelić

Expansion of Cellular Automata

We can imagine a cellular automaton (CA) as an infinite set of cells such that all of them are in a certain state (from a finite set of states) and all cells change their states simultaneously according to a local update rule. All such rules depend on the states of the cell's neighbors. This process is repeated in discrete time moments. It turns out that amazingly simple update rules may produce extremely complex dynamics when applied in this fashion – *Game of Life* is the most famous example of that. In this paper we discuss two dimensional binary (black and white) automata. The main results in this paper deal with, given the update rules, finding the minimal number of black cells in a subset of the whole CA such that, in a finite number of steps, the subset of the CA becomes entirely black. We also determine this number for an infinite table.