Ana Damnjanović i Filip Pokrić

Aritmetičke progresije duginih boja na grafovima

Anti-van der Verdenov broj grafa, koji obeležavamo sa aw(G, k)*, je najmanji prirodan broj* r *takav da svako surjektivno* r*-bojenje grafa* G *sadrži aritmetičku progresiju dužine* k *čiji je svaki član različite boje. U ovom radu, dali smo gornje ograničenje anti-Van der Verdenovog broja* aw(G, 3) *za proizvoljan graf, kao i jače ograničenje za bipartitne grafove. Predstavili smo ih u funkciji od broja grana i broja čvorova povezanih komponenti grafa. Za kraj, definisali smo anti-van der Verdenov broj grupoida* (S, ·)*, u oznaci* aw(S, k)*, i posmatrali smo vezu između* aw(G, k) *nekih klasa grafova i* aw(S, k) *njima ogovarajućih grupoida.*

Uvod

Ruski matematičar I. Šur je 1916. godine dokazao da za svaki prirodan broj k postoji dovoljno veliko n za koje važi da svako k-bojenje skupa $[n] := \{1, \ldots, n\}$ sadrži monohromatsko rešenje jednačine $x + y = z$ (Schur 1916). V. E. Aleksejev i S. Savčev su 1987. posmatrali takozvani anti-Šur problem i dokazali su da svako istobrojno 3-bojenje skupa $[3n]$ (kardinalnost svake klase boje je ista) sadrži rešenja jednačine $x + y = z$, gde x, y i z pripadaju različitim klasama boja (Alekseev i Savchev 1987). Tada se prvi put javlja pojam duge u ovom kontekstu matematike, jer su ova rešenja nazivana rešenjima duginih boja. J. Šonhajm je pokazao da svako 3-bojenje skupa prirodnih brojeva, pri kom je kardinalnost svake klase boja veća od $n/4$, sadrži rešenja jednačine $x + y = z$ koja su duginih boja (Schönheim 1988).

Inspirisan ovim problemima, Radoš Radoičić je je na seminaru kombinatorike Masačusetskog instituta za tehnologiju postavio sledeću hipotezu:

> Za svako istobrojno 3-bojenje skupa $[3n]$, postoji aritmetička progresija dužine 3, koja je duga.

Prvi rezultat vezan za ovu hipotezu je objavljen 2003. godine i on govori o preformulaciji hipoteze za ceo skup prirodnih brojeva. Hipoteza je dokazana 2004. godine kao posledica tvrđenja da će svako 3-bojenje skupa $[n]$ sadržati aritmetičku progresiju dužine 3 koja je duga, ako je kardinalnost svake klase boja barem $(n + 4)/6$ (Axenovich i Fon-Der-Flaas 2004). U radu Batlera i saradnika (Butler *et al*. 2016) prvi put se uvodi pojam anti-van der Verdenovog broja. Anti-van der Verdenov broj, u oznaci aw($[n]$, k) predstavlja najmanji broj boja dovoljan da se pri svakom surjektivnom bojenju skupa $[n]$ sigurno može pronaći aritmetička progresija dužine k koja je dúga. U radu tom radu je takođe pokazano da se aw($\mathbb{Z}_n$, 3) može izračunati ako se zna aw($\mathbb{Z}_p$, 3) za sve proste faktore broja n.

Anti-van der Verdenov broj grafa je prvi put uveden 2018. godine u radu Šultea i saradnika (Schulte *et al*. 2018) i on uspostavlja vezu između već poznatih vrednosti za aw($\mathbb{Z}_n$, 3) i aw($[n]$, 3) sa putevima P_n i ciklusima C_n. U ovom radu su takođe pronađene gornje granice za anti-van der Verdenov broj grafa preko parametara udaljenosti, kao i izračunate tačne vrednost anti-van der Verdenovog broja nekih klasa grafova.

Ana Damnjanović (2000), Mesto, učenica 4. razreda Treće beogradske gimnazije

Filip Pokrić (2002), Mesto, učenik 2. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

MENTOR: Branislav Šobot, student Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Cilj ovog rada nam je da izračunamo anti-van der Verdenov broj za neke klase grafova ili da damo neko gornje ograničenje koje nije dato preko parametara razdaljine u grafu i da vidimo na kojim algebarskim strukturama možemo opisati bojenja pomoću bojenja grafova.

Osnovne definicije i tvrđenja

Uvedimo par pojmova i lema koji će biti korišćeni u nastavku rada.

Definicija 1. *Aritmetička progresija* dužine k grafa G, koju ćemo obeležavati sa k-AP, je uređenja k-torka $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ različitih čvorova grafa G, gde je $d(v_i, v_{i+1}) = m$ za sve $1 \le i < k$ i neko $m \in \mathbb{N}$ pri standardnoj metrici na grafu.

Definicija 2. Precizno r-bojenje grafa G je surjektivna funkcija $c: V(G) \to \{1, 2, \ldots, r\}$.

Definicija 3. Aritmetička progresija:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in V(G)^k$$

je *progresija duginih boja* pri preciznom bojenju c, ako za sve $i, j \in \{1,2,\ldots, k\}$ važi $c(v_i) \neq c(v_j)$, kada je $v_i \neq v_j$.

Definicija 4. *Anti-van der Verdenov broj* grafa G, koji obeležavamo sa aw(G, k) je najmanji prirodan broj r takav da svako precizno r-bojenje grafa G sadrži aritmetičku progresiju duginih boja k-AP. Ako G ima tačno n čvorova i nema odgovarajuće precizno bojenje takvo da obrazuje k-AP, onda je aw$(G, k) = n + 1$.

Lema 1 (Schulte *et al*. 2018). Ako je G proizvoljan nepovezan graf sa povezanim komponentama $\{G_i\}_1^l$, onda:

$$\mathrm{aw}(G, k) = 1 + \sum_{i=1}^{l} \big(\mathrm{aw}(G_i, k) - 1\big).$$

Dokaz. Primetimo da je svaka aritmetička progresija nepovezanog grafa u celosti sadržana u jednoj komponenti povezanosti. Prema definiciji aw(G_i, k), svaka komponenta G_i se može obojiti u $\mathrm{aw}(G_i, k) - 1$ boja tako da ne sadrži aritmetičku progresiju dužine k koja je duga. Da bismo maksimizovali broj iskorišćenih boja, biramo boje tako da $c(G_i) \cap c(G_j)$, gde je $c(G_i)$ skup svih boja korišćen u komponenti G_i. Dakle, možemo izbeći aritmetičke progresije dužine k ako bojimo graf G u $\sum_{i=1}^{l} \big(\mathrm{aw}(G_i, k) - 1\big)$ boja, tj.

$$1 + \sum_{i=1}^{l} \big(\mathrm{aw}(G_i, k) - 1\big) \le \mathrm{aw}(G, k).$$

Prema Dirihleovom principu, ako se graf G oboji u $1 + \sum_{i=1}^{l} \big(\mathrm{aw}(G_i, k) - 1\big)$ boja, onda je bar jedna komponenta G_i obojena u barem aw(G_i, k) boja, samim tim će u njoj sigurno biti duga dužine k, tj.

$$1 + \sum_{i=1}^{l} \big(\mathrm{aw}(G_i, k) - 1\big) \ge \mathrm{aw}(G, k).$$

Tačnije:

$$\mathrm{aw}(G, k) = 1 + \sum_{i=1}^{l} \big(\mathrm{aw}(G_i, k) - 1\big).$$

□

Iz prethodne leme zaključujemo da se posmatranje anti-van der Verdenovog broja grafova može svesti na posmatranje anti-van der Verdenovog broja povezanih grafova.

Za leme koje ćemo koristiti u nastavku, potrebno je upoznati se sa nekim pojmovima i definicijama koje će nam služiti u daljem toku rada.

Definicija 5. *Ekscentricitet čvor*a $v \in V(G)$ je $e(v) = \max\{d(v, u) | u \in V(G)\}$. *Radijus grafa G* je $\mathrm{rad}(v) = \min\{e(v) | v \in V(G)\}$. *Centralni čvor* je svaki čvor čiji ekscentrititet je jednak radijusu grafa.

Primetimo da se iz prethodne defincije može zaključiti da je $2r \le |V(G)|$, gde je r radijus grafa G. Takođe, iz prethodne definicije zaključujemo da svaki graf ima barem jedan centralan čvor. Posmatrajući radijus, sledeća lema nam daje nejednakost kojom ograničavamo anti-van der Verdenov broj sa gornje strane.

Lema 2 (Schulte *et al*. 2018). Za svaki povezani graf G :

$$\mathrm{aw}(G, 3) \le \mathrm{rad}(G) + 2.$$

Dokaz. Neka je G povezan graf i neka je v centralni čvor u tom grafu. Neka je c precizno (rad(G) + 2)-bojenje grafa G koje nema 3-AP koja je duga. Neka je $c(v) = 1$ i neka je L_i skup svih čvorova koji su na rastojanju i od v. Primetimo da ako $v_1, v_2 \in L_i$ gde $c(v_1), c(v_2) \neq 1$ i $c(v_1) \neq c(v_2)$, onda je $\{v_1, v, v_2\}$ duga dužine 3. Zato na svakom L_i može da se nađe tačno jedna boja koja nije boja čvora v_1. Kako $i \in \{1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{rad}(G)\}$, imaćemo najviše rad$(G)$ različitih boja koje nisu boja centralnog čvora. Ako bojimo graf u rad(G) + 2 boje po Dirihleovom principu na nekom L_i će se nalaziti čvorovi v_k i v_{k+1} gde $1 \neq c(v_k) \neq c(v_{k+1}) \neq 1$. Onda će $\{v_1, v, v_2\}$ biti aritmetička progresija dužine 3 duginih boja. Tačnije, kontradikcijom dobijamo da svako (rad(G)+2)-bojenje grafa G sarži 3-AP koja je duga. □

Ukoliko važi odgovarajući uslov, ta granica je još oštrija što je pokazano u sledećoj lemi koju navodimo bez dokaza.

Lema 3 (Schulte *et al*. 2018). Za svaki povezani graf G takav da je rad(G) ≥ 3:

$$\mathrm{aw}(G,3) \leq \mathrm{rad}(G)+1.$$

Da bismo demonstrirali metod našeg rada, navodimo sledeći primer koji pokazuje kako može da se primenjuje znanje iz lema i pojmova koje smo uveli da se dokaže neko tvrđenje na grafovima.

Posmatrajući kompletne bipartitne grafove, lako možemo uočiti da nam je dovoljno 3 boje da garantujemo pojavljivanje aritmetičke progresije dužine 3, tako da je svaki čvor obojen različitom bojom. Ukoliko taj bipartitan graf nije kompletan, koliko nam je boja potrebno da bismo garantovali pojavljivanje aritmetičke progresije dužine 3 duginih boja? Sledeći zadatak u vidu primera nam daje odgovor na prethodno postavljeno pitanje, ali za određeni broj grana nekompletnog bipartitnog grafa.

Primer 1. Za sve prirodne brojeve m i n, gde $n \leq m$ i $n > 1$, svaki povezan bipartitan graf G čije particije redom imaju m i n čvorova i:

$$mn - m + 1 \leq |E(G)| \leq mn - 1$$

važi aw(G, 3) ≤ 4 i vrednost 4 se dostiže.

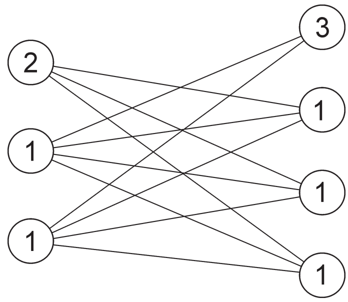
Dokaz. Za proizvoljan bipartitan graf G važi rad(G) ≥ 2 jer ni jedan čvor ne može biti povezan sa nekim drugim čvorom u svojoj particiji. Ako je neki čvor povezan sa svim čvorovima druge particije, svaki čvor iz njegove particije mora biti povezan sa nekim čvorom iz druge particije kako bi graf bio povezan, pa je rastojanje tog čvora tačno 2 od svakog čvora svoje particije. Najmanji broj grana koje nekompletan bipartitni graf mora imati da sa sigurnošću možemo reći da ima jedan čvor povezan sa svim iz druge particije je $mn - m + 1$.

Ako za povezan bipartitan graf G važi:

$$mn - m + 1 \leq |E(G)| \leq mn - 1,$$

onda on ima barem jedan čvor v povezan sa svim čvorovima iz particije kojoj ne pripada i radijus tog grafa je 2. Prema lemi 2 znamo da je aw(G, 3) $\leq$ rad(G) +2 za svaki povezan graf G. Sledi aw(G, 3) ≤ 4.

Sada još samo treba dokazati da postoji graf sa tim brojem grana kome je aw(G, 3) ≤ 4. Dokazaćemo da, ako uzmemo graf koji ima tačno $nm - 1$ granu, on se može obojiti u 3 boje tako da ne sadrži aritmetičku progresiju dužine 3. Čvorove koji se nalaze u različitim particijama i nemaju zajedničku granu obojimo u različite boje, redom 2 i 3, a sve ostale čvorove obojimo bojom 1, kao na slici 1. U tom slučaju neće postojati aritmetička progresija duginih boja dužine 3, jer dva čvora koja se nalaze na neparnom rastojanju ne mogu biti početak i kraj aritmetičke progresije, a ni jedan od ova dva čvora obojena sa 2 i 3 ne može biti ni u sredini jer su međusobno na rastojanju 3, a na rastojanju 1 ili 2 od svih preostalih čvorova. □



Slika 1. Ilustracija uz primer 1

Figure 1. Illustration related to example 1

Sada, ćemo navesti definicije funkcija (Dankelmann *et al*. 2011) koje ćemo u kasnijem radu koristiti da ograničavanje radijusa grafova.

Definicija 6. Neka su dati prirodni brojevi n i r, takvi da je $n \geq 2r \geq 2$. Tada je $f(n, r)$ najveći broj grana koje neki graf G može da ima sa n čvorova i radijusom r.

Definicija 7. Neka su dati prirodni brojevi n i r, takvi da je $n \geq 2r \geq 2$. Tada je $b(n, r)$ najveći broj grana koje neki bipartitan graf G može da ima sa n čvorova i radijusom r.

Sada navodimo dve leme bez dokaza (Dankelmann *et al*. 2011).

Lema 4. Za bilo koje prirodne brojeve n i r takve da je $n \geq 2$:

1. $f(n,1) = \frac{1}{2} n(n-1)$,
2. $f(n,2) = \frac{1}{2} n(n-1) - \left\lceil \frac{1}{2} n \right\rceil$,
3. $f(n,r) = \frac{1}{2}(n^2 - 4nr + 5n + 4r^2 - 6r)$,

za $n \geq 2r \geq 2$.

Lema 5. Za bilo koje prirodne brojeve n i r takve da je $n \geq 2$:

1. $b(n,1) = n-1$,
2. $b(n,2) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$,
3. $b(n,3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,
4. $b(n,r) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - nr + r^2 + 2(n-r)$,

za $n \geq 2r \geq 8$.

Primetimo da je vrednost funkcije $b(n, r)$ manja od vrednosti funkcije $f(n, r)$. Na osnovu toga možemo da primetimo sledeće:

$$|E(G)| \leq b(n,r) \leq f(n,r),$$

za svaki povezani bipartitan graf G sa n čvorova čiji je radijus r. To nam govori da je ograničenje za broj grana pomenutog grafa oštrije ukoliko koristimo lemu 5.

Rezultati i diskusija

Rezultate ćemo podeliti u dve celine: ograničavanje anti-Van der Verdenovog broja grafova i povezivanje rezultata sa algebarskim strukturama.

Opšte granice za anti-van der Verdenov broj grafa

Posmatrajući prethodne leme, postavlja se pitanje ograničavanja anti-van der Verdenovog broja sa gornje strane u funkciji od broja čvorova i grana datog grafa. Ograničenje koje sledi nije oštro u opštem slučaju, ali važi za bilo koji povezani graf.

Teorema 1. Za proizvoljan povezan graf G, gde je $|V(G)| = n$ i $|E(G)| = m$ važi nejednakost:

$$(G, 3) \leq \left\lfloor \frac{2n + 7 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4} \right\rfloor,$$

ako je $m \leq \frac{n^2 - 7n + 18}{2}$ i $n \geq 6$.

Dokaz. Za povezan graf čiji je radijus:

$$3 \leq r = \mathrm{rad}(G),$$

važi $m \leq f(n,r)$. Prema lemi 4 važi nejednakost:

$$m \leq \frac{1}{2}(n^2 - 4nr + 5m + 4r^2 - 6r),$$

za grafove čiji je radijus veći od 3, pa dobijamo da:

$$r \in \left(-\infty, \frac{2n + 3 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4} \right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{2n + 3 + \sqrt{8m - 8n + 9}}{4}, \infty \right).$$

Kako je $r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, interval:

$$\left[\frac{2n + 3 + \sqrt{8m - 8n + 9}}{4}, \infty \right)$$

nije potrebno razmatrati, a kako $3 \leq r$, dobijamo da:

$$r \in \left[3, \frac{2n + 3 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4} \right].$$

Pošto smo rekli da je m broj grana povezanog grafa sa n čvorova čiji je radijus barem 3, sada preko dobijene vrednosti za r treba da ograničimo vrednost m tako da može da obezbeđuje rad(G) ≥ 3. Primetimo da izraz:

$$\frac{2n + 3 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4}$$

predstavlja gornje ograničenje radijusa grafa sa m grana i n čvorova. Iz nejednakosti:

$$3 \leq \frac{2n + 3 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4}$$

i uslova da $n \geq 6$, dobijamo:

$$m \le \frac{n^2 - 7n + 18}{2}.$$

Primetimo da je $\frac{n^2 - 7n + 18}{2}$ uvek ceo broj, a pošto je vrednost r = rad(G) ceo broj, možemo pisati:

$$\mathrm{rad}(G) \le \left\lfloor \frac{2n + 3 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4} \right\rfloor.$$

Iz leme 2 znamo da ako rad(G) ≥ 3, važi:

$$\mathrm{aw}(G, 3) \le \mathrm{rad}(G) + 1.$$

Pošto naš izraz za najveći mogući radijus ispunjava uslov ove leme možemo je primeniti i dobijamo:

$$\mathrm{aw}(G, 3) \le \left\lfloor \frac{2n + 3 - \sqrt{8m - 8n + 9}}{4} \right\rfloor.$$

□

Da bismo slikovitije prikazali o čemu govori teorema, daćemo tri primera.

Primer 2. Kada posmatramo „relativno mali povezan graf", na primer povezan graf sa 12 čvorova i 20 grana, vidimo da na taj graf može da se primeni teorema, jer ispunjava uslove teoreme. Dobijamo da taj graf ako bojimo u 5 boja, uvek ima aritmetičku progresiju dužine 3 koja je duga, ali je svaka boja korišćena u proseku na 2.4 čvorova i taj rezultat ne zvuči preterano oštro.

Primer 3. Kada posmatramo „povezan graf osrednje veličine" sa 70 čvorova i 1500 grana, vidimo da na taj graf može da se primeni teorema, jer ispunjava uslove teoreme. Dobijamo da se u tom grafu pri 9-bojenju uvek javlja aritmetička progresija dužine 3 koja je duga. Ovaj rezultat, je oštriji jer se svaka boja koristi u proseku na 7.77 čvorova. U ovom primeru je jasnije da je bilo kakvo ručno ispitivanje anti-van der Verdenovog broja grafa nemoguće.

Primer 4. Kada posmatramo „jako veliki povezan graf" sa 1200 čvorova i sa 700 000 grana ponovo će nam biti dovoljno 9 boja tako da uvek postoji aritmetička progresija dužine 3 koja je duga. U ovom primeru svaka boja je korišćena u proseku na 77 777.77 čvorova, što je dosta precizniji rezultat.

Iz ovih primera zaključujemo da, što je broj grana ,,bliži" granici zadatoj u uslovu teoreme, to nam je manje boja potrebno. Šta više, ako dostignemo jednakost u uslovu teoreme, biće nam dovoljne 4 boje za proizvoljno n.

Definicija 8. Graf G je *k-regularan* ako je stepen svakog njegovog čvora tačno k, gde je k prirodan broj i $2 \le k \le |V(G)| - 1$.

Posledica 1. Za proizvoljan k-regularan graf G, gde je $|V(G)| = n$, važi nejednakost:

$$\mathrm{aw}(G, 3) \le \left\lfloor \frac{2n + 7 - \sqrt{4kn - 8n + 9}}{4} \right\rfloor,$$

ako $k \le \left\lfloor \frac{n^2 - 7n + 18}{n} \right\rfloor$ i $n \ge 6$.

Dokaz. Broj grana k-regularnog grafa sa n čvorova je $|E(G)| = m = \frac{nk}{2}$. Sada prema teoremi 1 znamo:

$$\mathrm{aw}(G, 3) \le \left\lfloor \frac{2n + 7 - \sqrt{4kn - 8n + 9}}{4} \right\rfloor,$$

ako je $k \le \left\lfloor \frac{n^2 - 7n + 18}{n} \right\rfloor$ i $n \ge 6$.

□

Primer 5. Da bismo slikovitije prikazali ovu posledicu, primetimo da, ako posmatramo k-regularan graf, postoji određen skup vrednosti koje k može imati da bi se na taj graf mogla primeniti posledica. Na primer, ako uzmemo da je vrednost n jednaka 26, onda ako k pripada skupu $\{2, 3, \ldots, 19\}$, možemo primeniti posledicu 1. Proizvoljnim izborom biramo $k = 14$ i dobijamo da nam je dovoljno 5 boja za precizno bojenje grafa, tako da on sadrži aritmetičku progresiju dužine 3 koja je duga.

Možemo da primetimo da za bipatritne grafove važi „jače" tvrenje (lema 5) nego za opšte grafove (lema 4), pa, koristeći tu lemu, dobijamo u opštem slučaju bolje ograničenje za anti-van der Verdenov broj bipatritnih grafova.

Teorema 2. Za proizvoljan povezan bipartitan graf G, gde je $|V(G)| = n$ i $|E(G)| = m$, važi nejednakost:

$$\mathrm{aw}(G, 3) \le \left\lfloor \frac{n + 4 - 2\sqrt{4m - n + 1}}{2} \right\rfloor,$$

ako je $m \le \left\lfloor \frac{n^2 - 8n + 32}{n} \right\rfloor$ i $n \ge 8$.

Dokaz. Za povezan biparitan graf čiji je radijus $4 \le r = \mathrm{rad}(G)$, važi $m \le b(n, r)$, kako je

$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \le \frac{n^2}{4}$, važi i $m \le \frac{n^2}{4} - nr + r^2 + 2r - 2n$. Dobijamo da:

$$r \in \left(-\infty, \frac{n+2-2\sqrt{m-n+1}}{2}\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{n+2+2\sqrt{m-n+1}}{2}, \infty\right).$$

Zbog $r \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, interval:

$$\left[\frac{n+2+2\sqrt{m-n+1}}{2}, \infty\right)$$

nije potrebno razmatrati, a kako $4 \le r$, dobijamo da:

$$r \in \left[4, \frac{n+2-2\sqrt{m-n+1}}{2}\right].$$

Pošto smo rekli da je m broj grana povezanog bipartitnog grafa sa n čvorova čiji je radijus barem 4 sada preko dobijene vrednosti za r treba da ograničimo vrednost m tako da može da obezbeuje rad(G) ≥ 4. Primetimo da izraz $\frac{n+2+2\sqrt{m-n+1}}{2}$ predstavlja gornje ograničenje radijusa povezanog bipartitnog grafa sa m grana i n čvorova. Iz nejednakosti:

$$4 \le \frac{n+2+2\sqrt{m-n+1}}{2}$$

i uslova da $n \ge 8$ dobijamo:

$$m \le \frac{n^2-8n+32}{4}.$$

Pošto su vrednosti m i r = rad(G) celi brojevi, možemo pisati:

$$m \le \left\lfloor \frac{n^2-8n+32}{4} \right\rfloor$$

i

$$\mathrm{rad}(G) \le \left\lfloor \frac{n+2-2\sqrt{m-n+1}}{2} \right\rfloor.$$

Iz leme 2 znamo da ako rad(G) ≥ 3, važi aw(G, 3) $\le$ rad(G) + 1. Pošto naš izraz za najveći mogući radijus ispunjava uslov ove leme možemo je primeniti i dobijamo:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left\lfloor \frac{n+4-2\sqrt{4m-n+1}}{2} \right\rfloor. \qquad \square$$

Primer 6. Da bismo demonstrirali da je korišćenje ovog tvrenja za bipartitne grafove „jače" nego korišćenje teoreme 1, upotrebićemo bipartitan graf koji ima 30 čvorova i 150 grana, jer se na takav graf mogu primeniti obe teoreme. Prema teoremi 1 dovoljno nam je 8 boja, dok je prema teoremi 2 dovoljno 6.

Narednih nekoliko tvrđenja se odnose na nepovezane grafove.

Teorema 3. Za proizvoljan graf G sa komponentama povezansoti $\{G\}_1^l$, sa $\{n_i\}_1^l$ čvorova i $\{m_i\}_1^l$ grana u tim komponentama redom, važi da je:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left\lfloor \frac{2n+3l+4-\sum_{i=1}^{l}\sqrt{8m_i-8n_i+9}}{4} \right\rfloor,$$

gde je $n = \sum_{i=1}^{l} n_i$, $m_i \le \left\lfloor \frac{n_i^2-7n_i+18}{2} \right\rfloor$ i $n_i \ge 6$ za svako $i \in \{1,\ldots,l\}$.

Dokaz. Iz teoreme 1 znamo da je za svaki G_i, u kom $m_i \le \left\lfloor \frac{n_i^2-7n_i+18}{2} \right\rfloor$ i $n_i \ge 6$, važi:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left\lfloor \frac{2n_i+7-\sqrt{8m_i-8n_i+9}}{4} \right\rfloor,$$

tako da znamo i da:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \frac{2n_i+7-\sqrt{8m_i-8n_i+9}}{4}.$$

Iz leme 1 znamo:

$$\mathrm{aw}(G,k) = 1 - l + \sum_{i=1}^{l}\left(\mathrm{aw}(G_i,k)\right).$$

Kada ubacimo vrednosti dobijemo:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left| \frac{2n+3l+4-\sum_{i=1}^{l}\sqrt{8m_i-8n_i+9}}{4} \right|$$

pošto znamo da je aw(G, 3) ceo broj možemo smanjiti granicu na donji ceo deo. $\square$

Teorema 4. Za proizvoljan bipartitan graf G sa komponentama povezanosti $\{G\}_1^l$, $\{n_i\}_1^l$ čvorova i $\{m_i\}_1^l$ grana u tim komponentama redom, važi da je:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left\lfloor \frac{2n+2l+2-2\sum_{i=1}^{l}\sqrt{m_i-n_i+1}}{2} \right\rfloor,$$

gde je $n=\sum_{i=1}^{l} n_i$, $m_i \le \left\lfloor \frac{n_i^2-7n_i+18}{2} \right\rfloor$ i $n_i \ge 6$ za svako $i \in \{1,\ldots,l\}$.

Dokaz. Iz teoreme 2 znamo da za svaki G_i, u kom $m_i \le \frac{n_i^2-8n_i+32}{4}$ i $n_i \ge 6$, važi:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left\lfloor \frac{n_i+4-2\sqrt{m_i-n_i+1}}{2} \right\rfloor,$$

tako da znamo i da:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \frac{n_i+4-2\sqrt{m_i-n_i+1}}{2}.$$

Iz leme 4 znamo da:

$$\mathrm{aw}(G,k) = 1-l+\sum_{i=1}^{l}\left(\mathrm{aw}(G_i,k)\right).$$

Kada ubacimo vrednosti dobijemo:

$$\mathrm{aw}(G,3) \le \left\lfloor \frac{2n+2l+2-2\sum_{i=1}^{l}\sqrt{m_i-n_i+1}}{2} \right\rfloor$$

pošto znamo da je aw(G, 3) ceo broj možemo smanjiti granicu na donji ceo deo. □

Anti-van der Verdenov broj u grafovima i grupoidima

Do sada smo posmatrali probleme aritmetičkih progresija duginih boja na grafovima. U ovom delu rada, posmatraćemo generalizaciju početnog problema na grupoidima. Kao i u prethodnim delovima ovog rada, prvenstveno ćemo se baviti aritmetičkim progresijama duginih boja dužine 3. Naravno, najpre moramo uvesti osnovne pojmove kako bi se definicije mogle primeniti na grupoide.

Definicija 9. *Aritmetička progresija dužine 3* u grupoidu $(S,\cdot)$ je uređena trojka (x, y, z), gde su x, y i z različiti elementi iz skupa S i važi:

$$x \cdot z = y \cdot y.$$

Na sličan način kao i kod grafova, možemo da definišemo bojenje.

Definicija 10. Precizno r-bojenje grupoida $(S,\cdot)$ je surjektivna funkcija:

$$c: S \to \{1, 2, \ldots, r\}.$$

Takođe, definišemo i aritmetičke progresije duginih boja (dužine 3).

Definicija 11. *Aritmetička progresija duginih boja* na grupoidu je aritmetička progresija (x, y, z) za koju važi:

$$c(x) \ne c(y) \ne c(z) \ne c(x).$$

Na kraju nam ostaje da definišemo anti-van der Verdenov broj na grupoidima.

Definicija 12. *Anti-van der Verdenov broj grupoida* $(S,\cdot)$ se obeležava sa aw(S, k) i to je najmanji prirodan broj r takav da svako precizno r-bojenje skupa S sadrži aritmetičku progresiju duginih boja dužine k.

Naravno, uočavamo da nismo definisali aritmetičku progresiju dužine k za $k \ge 3$, ali to je zato što takve aritmetičke progresije nećemo ni posmatrati, te nije bilo potrebe za takvim definicijama.

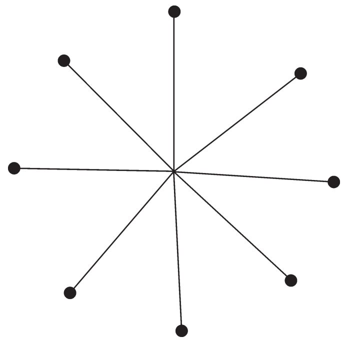
Definicija 13. Graf G i grupoid S se slažu po aritmetičkim progresijama ako postoji bijekcija $f: G \to S$ takva da ako je (x, y, z) aritmetička progresija u grafu G akko je $(f(x), f(y), f(z))$ aritmetička progresija u grupoidu S.

Posmatrajući grupoide na ovaj način postavlja se pitanje: Da li je moguće naći korespodenciju između grafova i grupoida, tj. da li svakom grafu možemo da pridružimo grupoid u kome se čuva svojstvo „biti u aritmetičkoj progresiji". Odgovor je „ne može", jer ćemo pokazati da je za neke klase grafova to nemoguće.

Prvo ćemo posmatrati zvezde S_k. Ova klasa grafova se može definisati na mnogo načina, pa ćemo je definisati na nama najpogodniji način.

Definicija 14. Zvezda, u oznaci S_k, je kompletan bipartitan graf $K_{1,k}$, gde su 1 i k brojevi elemenata u particijama tog kompletnog bipartitnog grafa. Čvor bipartitnog grafa koji je jedini element particije ćemo u nastavku nazivati centralnim čvorom i obeležavati ga sa m.

Na početku rada smo definisali nešto što se zove centralni čvor, a ta definicija centralnog čvora odgovara centralnom čvoru u zveda grafu, odakle i naziv.



Slika 2. Primer zvezde S_8

Figure 2. Star graph S_8

Najpre, vrlo lako možemo da uočimo da je aw(S_k, 3) = 3.

Lema 6. Za svako $k \in \mathbb{N}$, takvo da $k \geq 2$ važi aw(S_k, 3) = 3.

Dokaz. Neka nam je dato neko 3-bojenje S_k grafa. Uočavamo da se problem može razložiti na dva slučaja.

1. Postoje $v_1, v_2, v_3 \in V(S_k) \setminus \{m\}$ takvi da važi $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$ i $c(v_3) = 3$. Primetimo da za svaka dva čvora $a, b \in V(S_k) \setminus \{m\}$ važi $d(a, b) = 2$, dakle $\{v_1, m, v_2\}$ je aritmetička progresija duginih boja dužine 3.

2. Ne postoje $c(v_1), c(v_2), c(v_3) \in V(S_k) \setminus \{m\}$ takvi da važi $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$ i $c(v_3) = 3$, tj. čvor m je jedini čvor u grafu S_k obojen bojom (recimo) 1 i postoje $v_1, v_2 \in V(S_k) \setminus \{m\}$ za koje je bez umanjenja opštosti, neka je 3, $c(v_2) = 2$. Primetimo da za svaki čvor $a \in V(S_k) \setminus \{m\}$ važi $d(a, m) = 1$, dakle $\{v_1, m, v_2\}$ je aritmetička progresija duginih boja dužine 3. □

Sada, ćemo da konstruišemo grupoid (ili pokažemo da on ne postoji) takav da svaka aritmetička progresija u njemu odgovara nekoj aritmetičkoj progresiji u grafu S_k. Na taj način, znajući anti-van der Verdenov broj u grafu, dobijamo i anti-van der Verdenov broj za konstruisan grupoid.

Neka je tražen grupoid $(S, \cdot)$, gde je $S = \{a_0, a_1, a_2, \ldots a_k\}$. Centralni čvor odgovara elementu a_0, pa prvo, posmatrajmo aritmetičke progresije oblika (v_i, m, v_j), gde je $i \neq j$ i $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ovakve aritmetičke progresije u grafu odgovaraju aritmetičkim progresijama u $(S, \cdot)$, koje su oblika (a_i, a_0, a_j), gde je $i \neq j$ i $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i neka je takva funkcija data sa $f : v_i \to a_i$. Primetimo da onda mora da važi $a_i \cdot a_j = a_0^2$. Neka su sada a_i, a_j i a_l elementi takvi da $i \neq j \neq l \neq i$. S obzirom na to da je (v_i, v_l, v_j) aritmetička progresija u grafu, onda mora i da je (a_i, a_l, a_j) aritmetička progresija u $(S, \cdot)$, tj. $a_i \cdot a_j = a_l^2$, a na osnovu prethodnog važi $a_l^2 = a_0^2$, za svako $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ostalo nam je još da razmotrimo slučaj kada element a_0 nije u sredini ureene trojke, već sa jedne ili druge strane. Primetimo da u slučajevima (m, v_i, v_j) i (v_i, v_j, m), gde je $i \neq j$ i $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, ove uređene trojke ne predstavljaju aritmetičku progresiju, pa je $a_0 \cdot a_j \neq a_i^2 = a_0^2$, tj. $a_0 \cdot a_j \neq a_0^2$. Na osnovu ovih zaključaka, možemo da definišemo operaciju u grupoidu $(S, \cdot)$. Naravno a_0^2 može da daje bilo koji element iz skupa S, ali mi smo kao rezultat uzeli a_0.

Teorema 5. Neka je $(S, \cdot)$, $S = \{a_0, \ldots, a_k\}$ komutativna polugrupa, gde je:

$$a_i \cdot a_j = \begin{cases} a_0 & (i \neq 0 \wedge j \neq 0) \vee i = j = 0 \\ a_1 & (i = 0 \wedge j \neq 0) \vee (j = 0 \wedge i \neq 0) \end{cases}.$$

Anti-van der Verdenov broj ove komutativne polugrupe se slaže sa anti-van der Verdenovim brojem aw(S_k, 3) i on iznosi 3.

Dokaz. Kako je ovaj grupoid konstruisan tako da odgovara S_k zvezda grafu, njihovi anti-van der Verdenovi brojevi su isti tj. aw(S, 3) = 3. □

Posmatrajmo kompletne bipartitne grafove, koji su još jedan primer klase grafova za koje je moguće konstruisati odgovarajući grupoid. Ranije smo već spominjali da je aw($K_{m,n}$, 3) = 3, iako nigde to nismo dokazali, jer smatramo da je dokaz trivijalan.

Prilikom konstrukcije grupoida koji odgovara $K_{m,n}$ grafu, najpre moramo da uočimo da je $|K| = m + n$. Obeležićemo elemente ovog skupa tako da razlikujemo one koji odgovaraju čvorovima kompletnog bipartitnog grafa u različitim particijama. Neka je onda $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, gde čvorovi koji odgovaraju elementima a_i pripadaju particiji V_1, a čvorovi koji odgovaraju elementima b_i pripadaju particiji V_2. Ono što je vrlo bitno uočiti na grafu je da ako $v_i \in V_1$ i $v_j \in V_2$, onda ne postoji aritmetička progresija oblika (v_i, v_x, v_j). Drugim rečima, ako je (v_i, v_x, v_j)

aritmetička progresija, onda su v_i i v_j u istoj particiji.

Teorema 6. Komutativna polugurpa $(S, \cdot)$, gde je $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ i operacija zadata sa:

$$x_i \cdot y_j = \begin{cases} a_1, (x_i, y_j \in V_1 \vee x_i, y_j \in V_2) \\ b_1, (x_i \in V_1 \wedge y_j \in V_2) \vee (x_i \in V_2 \wedge y_j \in V_1) \end{cases}$$

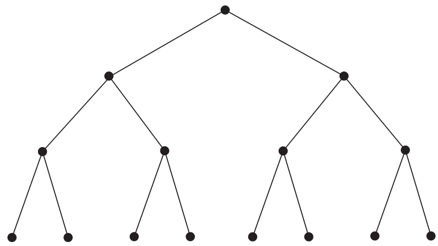
odgovara kompletnom bipartitnom grafu $K_{m,n}$ i njen anti-van der Verdenov broj je 3.

Dokaz. Najpre, posmatrajmo sve aritmetičke progresije dužine 3, gde je rastojanje između svaka dva čvora u njoj tačno 1. Mora da važi da je $a_i a_j = b_l^2$ i $b_l b_t = a_i^2$, za sve $i, j \in \{1, 2, .., m\}$ i $l, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odavde zaključujemo da su kvadrati svih elemenata iz iste particije jednaki. Pored toga, proizvodi dva različita elementa iz jedne particije su jednaki kvadratima elemenata druge particije. Sada, ukoliko izaberemo bilo koja tri čvora iz iste particije, oni će obrazovati aritmetičku progresiju jer su svaka dva takva čvora na rastojanju tačno 2. Tada mora da važi da su kvadrati elemenata i proizvodi dva različita elementa iz iste particije jednaki. Na osnovu ovog i prethodnog zaključka proizvod bilo koja dva elementa koji su iz iste particije(ne moraju biti različiti) je jednak, pa odatle ovaj grupoid odgovara $K_{m,n}$ grafu, pa je aw$(K, 3) = 3$. □

Sledeću klasu grafova koje ćemo posmatrati su *binarna stabla*, koja ćemo obeležavati sa B_n, gde je n broj nivoa datog binarnog stabla. Primetimo da binarno stablo B_n sadrži tačno $2(n-1)$ čvorova (slika 3).

Definicija 15. U teoriji grafova, stablo je svaki povezan graf koji nema cikluse. Binarno stablo B_n je stablo u kome tačno $2(n-1)$ čvorova ima tačno stepen 1, a ostatak tačno stepen 2.

Ukoliko posmatramo binarno stablo B_1, koje ima 3 čvora, očigledno mu je anti-van der Verdenov broj 3. Vrlo lako možemo da konstruišemo grupoid B, takav da odgovara stablu B_1. Neka čvor na nultom nivou odgovara elementu a, a čvorovi na prvom nivou odgovaraju elementima b i c, gde $a, b, c \in B$. U grupoidu $(B, \cdot)$ takvom da odgovara binarnom stablu B_1, mora da važi: $b \cdot c = a \cdot a$. Ovo je takođe i jedina aritmetička progresija koja se nalazi u grupoidu $(B, \cdot)$, pa vrlo lako možemo da definišemo i operaciju.



Slika 3. Primer B_3 binarnog stabla

Figure 3. Proper binary tree B_3

Teorema 7. Algebarska struktura $(B, \cdot)$, gde je $B = \{a, b, c\}$ i operacija $\cdot$ zadata tabelom ispod je komutativna polugrupa, čiji je anti-van der Verdenov broj 3:

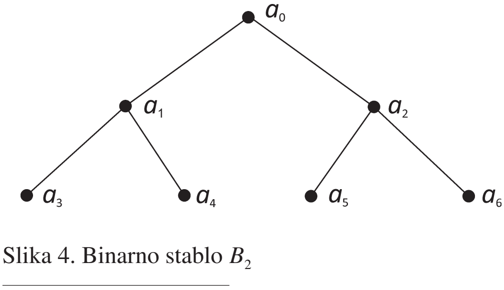
$\cdot$	a	b	c
a	a	b	b
b	b	c	a
c	b	a	c

Primetimo da su grafovi B_1, $K_{1,2}$, kao i S_2 ekvivalentni, međutim, ovde smo dobili tri različita grupoida proučavajući isti graf.

Na sličan način kao gore, pokušaćemo da konstruišemo grupoid koji odgovara binarnom stablu B_2. Neka je skup $W = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6\}$. Elementi iz ovog skupa W odgovaraju određenim čvorovima u B_2 kao na slici 4.

Teorema 8. Ne postoji grupoid takav da reprezentuje binarno stablo B_2.

Dokaz. Posmatrajmo skup $W = \{a_0, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_6\}$. Na osnovu slike 4 zaključujemo da je



Slika 4. Binarno stablo B_2

Figure 4. Proper binary tree B_2

$a_0^2 = a_3a_6$ i $a_0^2 = a_5a_6$ (jer su a_3, a_0, a_6 i a_5, a_0, a_6 aritmetičke progresije). Isto tako važi i da je $a_4^2 = a_5a_6$ jer je a_5, a_4, a_6 aritmetička progresija. Primećujemo da je $a_5a_6 = a_0^2 = a_4^2$. Posmatrajmo a_3, a_4, a_6 (koji ne obrazuju aritmetičku progresiju). Tada je $a_3a_6 = a_0^2 = a_4^2$, pa oni po definiciji čine aritmetičku progresiju, što je kontradikcija, pa grupoid za B_2 binarno stablo ne postoji. □

Na osnovu ove teoreme, zaključujemo da ne postoji grupoid takav da odgovara binarnom stablu B_n, gde je $n \geq 2$, jer je svako takvo binarno stablo nadskup binarnog stabla B_2.

Zaključak

Razvitak ovog polja matematike traje već čitav vek, naravno kroz to vreme javljale su se mnogobrojne varijacije na problem, a najskorije se razvijaju dve varijacije kojima smo se mi bavili: ispitivanje anti-van der Verdenovog broja grafa i grupoida.

Mi smo dali slabo ograničenje anti-van der Verdenovog broja opšteg, bipartitnog i regularnog grafa u odnosu na broj grana i broj čvorova grafa, odnosno broja čvorova i stepena regularnosti grafa. Ove granice su slabe u opštem slučaju jer su izvedene iz dva, takođe u opštem slučaju slaba, ograničenja. Zatim smo izveli gornja ograničenja za nepovezane grafove, ali moramo primetiti da su ova ograničenja korisna samo za one grafove koji imaju relativno malo povezanih komponenti u odnosu na broj čvorova, jer inače granica koju smo mi dali može biti veća od broja čvorova.

Probali smo da već postojeće rezultate za anti-van der Verdenove brojeve klasa grafova iskoristimo za izračunavanje anti-van der Verdenovih brojeva grupoida ili da pokažemo da se neka klasa grafova ne može iskoristiti da se napravi prelaz na neki grupoid.

Literatura

Alekseev V. E., Savchev S. 1987. Problem M 1040. *Kvant*, 4: 23

Axenovich M., Fon-Der-Flaass D. 2004. On rainbow arithmetic progressions. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **11**.

Butler S., Erickson C., Hogben L., Hogenson K., Kramer L., et al. 2016. Rainbow Arithmetic Progressions. *Journal of Combinatorics*, **7**: 595.

Dankelmann P., Swart H. C., van den Berg P. 2011. The number of edges in a biparite graph of given radius. *Discrete Mathematics*, **311**: 698.

Schulte A., Warnberg N., Young M. 2018. Anti-van der Waerden numbers on Graphs. https://arxiv.org/abs/1802.01509 (Preprint)

Schur I. 1916. Uber die Kongruenc $x^m + y^m = z^m$ mod *p*. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **25**: 114.

Schönheim J. 1988. On partitions of the positive integers with no *x*, *y*, *z* belonging to distinct classes satisfying $x + y = z$. U *Number Theory: Proceedings of the First Conference of the Canadian Number Theory Association* (ur. R. A. Mollin). Berlin: De Gruyter, str. 515-520.

Ana Damnjanović and Filip Pokrić

Rainbow Arithmetic Progressions on Graphs

The anti-van der Waerden number of a graph, denoted by aw(G, k), is the smallest natural number r such that every r-coloring of the graph G contains a rainbow k-term arithmetic progression. In this paper, an upper bound of the anti-van der Waerden number of any graph is obtained, as well as a stronger bound for bipartite graphs. The bound is given in terms of the number of vertices and edges in connected components of a graph. We defined the anti-van der Waerden number of a magma $(S, \cdot)$, denoted by aw$(S, \cdot)$, and observed links between aw(G, k) of some graphs and aw(S, k) of magmas.