Tanja Gavrić i Dragan Marković

Periodične orbite i Štefan-konstruktibilnost

Dat je moderan dokaz teoreme Šarkovskog preko digrafova. Diskutujemo periode funkcije i uvodimo termine Štefanovi ciklusi i Štefan-konstruktibilnost. Izloženi su dosadašnji rezultati vezani za konstrukcije minimalnih orbita Štefanovih ciklusa, specijalno ciklusa oblika $2(2k+1)$. *U posljednjem odeljku izlažemo nove rezultate uopštavanja ovih konstrukcija, ciklusa oblika* $2^r(2k+1)$ *i dajemo primjere prikazane putem digrafova.*

Pojmovi i definicije

U prvom dijelu ovog rada data je skica dokaza iz knjige Bloka i Kopela (Block i Coppel 1992).

Neka je f neprekidna funkcija i I interval takav da $f\colon I \to I$

$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^m(x) = (f \circ f^{m-1})(x) = \underbrace{f(f(f\ldots(x)))}_{m \text{ puta}}, \; m \geq 1$$

Definicija 1.1. Orbita je skup svih tačaka koje obuhvataju iteracije funkcije f u oznaci:

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) \mid n \geq 0\}$$

Definicija 1.2. Za orbitu kažemo da je periodična sa periodom m ako važi da je:

$$f^m(c) = c \;\text{ i }\; f^k(c) \neq c \quad \text{za } 1 \leq k < m, \; c \in I$$

Dakle periodična m-orbita se sastoji od:

$$c, f(c), \ldots, f^{m-1}(c)$$

Definicija 1.3. Poredak prirodnih brojeva:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd \cdots 2^2 \cdot 3 \rhd \cdots 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

nazivamo Šarkovski poredak.

Tanja Gavrić (2000), Zvornik, Svetog Save 378, učenica 3. razreda SŠC „Petar Kočić” u Zvorniku, Republika Srpska, BiH

Dragan Marković (2000), Bijeljina, Patkovača 102, učenik 3. razreda Gimnazije „Filip Višnjić” u Bijeljini, Republika Srpska, BiH

MENTOR: Mihaljo Cekić, postdoktorski student na Institutu Maks Plank za matematiku u Bonu

Teorema 1.4. Neka je funkcija f neprekidna na nekom intervalu I. Prateći uređenje prirodnih brojeva prema Šarkovskom važi sljedeće:
Ako f ima periodičnu tačku perioda m i važi $m \triangleright n$, onda f ima i period n.

Ovo pokazuje da je skup perioda neprekidne funkcije rep poretka Šarkovskog. Rep predstavlja skup $\mathcal{T} \notin \mathbb{N}$ takav da važi $s \triangleright t$ za sve $s \notin \mathcal{T}$ i sve $t \in \mathcal{T}$.

Teorema 1.5. Svaki rep poretka Šarkovskog je skup perioda neke neprekidne funkcije f: $I \to I$.

Teorema Šarkovskog objedinjuje teoreme 1.4 i 1.5 i formuliše na sljedeći način:

Teorema Šarkovskog. Podskup od $\mathbb{N}$ je skup perioda za neprekidnu funkciju f: $I \to I$ ako i samo ako je taj skup rep Šarkovskog poretka.

Prije dokaza ove teoreme, neophodno je dokazati par drugih tvrđenja.

Lema 1.6. Ako je J podinterval $J \subseteq I$ i važi $J \subseteq f(J)$, onda f ima fiksnu tačku u J.

Dokaz. Neka je $J = [a, b]$. Tada postoje c, d takvi da je $f(c) = a$, $f(d) = b$. Kako je $f(c) \le c$ i $f(d) \ge d$, po teoremi o međuvrijednosti, funkcija f ima fiksnu tačku u J: c' tj. $f(c') = c'$. □

Lema 1.7. Neka su J, K intervali, i $K \subseteq f(J)$. Tada postoji interval L, $L \subseteq J$ takav da je $f(L) = K$.

Dokaz. Neka je $K = [a, b]$ i neka je $c = \sup\{x \in J \ : \ f(x) = a\}$. Ako je $f(x) = b$ za neko $x > c$, neka je d najmanje takvo x. Tada dobijamo da je $L = [c, d]$. U suprotnom, ako je $x < c$, neka je c_1 najveće, a $d_1 \le c$ najmanje takvo x da važi $f(x) = a$. Tada je $L = [c_1, d_1]$. □

Lema 1.8. Neka su $J_0, J_1, \ldots, J_m$ kompaktni intervali za koje važi $J_k \subseteq f(J_{k-1})$ i $1 \le k < m$. Tada postoji interval $L \subseteq J_0$ takav da $f^m(L) = = J_0 \cdot f^k(L) \subseteq J_k$ $(1 \le k < m)$. Ako još vrijedi $J_0 \subseteq J_m$, onda postoji y takvo da važi: $f^m(y) = y, f^k(y) \subseteq J_k$ $(1 \le k < m)$.

Dokaz. Za $m = 1$ tvrđenje je ekvivalentno lemi 1.7. Prirodno je uraditi dokaz matematičkom indukcijom. Prema uslovu leme imamo:

$$J_1 \subseteq f(J_0), J_2 \subseteq f(J_1), \ldots, J_k \subseteq f(J_{k-1})$$

Primijenimo indukcionu pretpostavku za poslednjih $m-1$ relacija. Tada:

$$\exists L' \subseteq J_1 : f^{m-1}(L') = J_m, \ f^k(L') \in J_{k+1} \ (1 \le k < m-1)$$

S druge strane, $L' \subseteq J_1 \subseteq f(J_0) \Rightarrow \exists L \subseteq J_0$ takvo da $f(L) = L' \subseteq J_1$ (prema lemi 1.6). Zaključujemo:

$$f^{m-1}(L') = f^m(L) = J_m \text{ i } f^{k-1}(L') = fk(L) \subseteq J_k \ (1 \le k < m)$$

Ako važi i drugi uslov, imamo sljedeće:

$$\exists L \subseteq J_0 : f^m(L) = J_m \supseteq J_0 \supseteq L \Leftrightarrow L \subseteq f^m(L)$$

Prema lemi 1.6:
$\exists y \in L : f^m(y) = y, f^k(y) \in J_k \ \ (1 \le k < m)$ □

Lema 1.9. Između bilo koje dvije susjedne tačke periodične orbite na intervalu $I\left(f^{k}(c), f^{k+1}(c),\ \ 0 \leq k < n\right)$, perioda $n > 1$ postoji tačka sa periodom manjim od n.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, neka su to tačke a i b i neka je $b > a$. Dakle, $a, b \in I$ i $[a, b] \subseteq I$. Sada, posmatrajmo sve $m < n$ takve da je $f^{m}(b) < b$. Postoji najmanje jedno takvo m, zbog postojanja a. Dalje, za neko m mora da važi $f^{m}(a) > a$ i $f^{m}(b) < b$. Ako ova relacija ne važi, tada bi za sve $m < n$ $f^{m}(a) < a$, što je kontradikcija jer se radi o periodičnoj orbiti. Razmatrajmo dva slučaja:

1. f^{m} je definisano na $[a, b]$,
2. f^{m} nije definisano na $[a, b]$.

U prvom slučaju, imamo da je:

$$f^{m}(a) > a \text{ i } f^{m}(b) < b \Rightarrow \exists y \in [a, b] : f^{m}(y) = y$$

U drugom slučaju, pošto f^{m} nije definisano na intervalu $[a, b]$, prateći prvi dio dokaza leme za neko m mora da važi: $f^{m}(a) \geq b$ i $f^{m}(b) \leq a$. Neka je $J_{k} = [f^{k}(a), f^{k}(b)]$, $1 \leq k \leq m$. Vidimo da važi $J_{k} \subseteq f(J_{k-1}) \Rightarrow J_{0} \subseteq J_{m}$. Ovaj uslov je ekvivalentan sa uslovima leme 1.8 što znači da postoji y takvo da $f^{m}(y) = y$. $\square$

Digrafovi

Osobine i operacije

Definicija 2.1. Neka su $x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{n}$ brojevi u intervalu I koji leže na orbiti. Neka je J_{i} interval oblika $J_{i} = [x_{i},\ x_{i+1}]$. Ako važi $f\left(J_{a}\right) \supseteq J_{b}$ to ćemo zvati: J_{a} se slika u J_{b} u oznaci $J_{a} \to J_{b}$. Više intervala povezanih relacijom $\to$ naziva se digraf.

Definicija 2.2. Ako je $f(x_{i}) = x_{s_{i}}$, $(1 \leq s_{i} \leq n)$, ovakvo preslikavanje zapisujemo na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} x_{1} & x_{2} & \cdots & x_{n-1} & x_{n} \\ s_{1} & s_{2} & \cdots & s_{n-1} & s_{n} \end{pmatrix}$$

Zbog jednostavnosti, uglavnom ćemo ove permutacije označavati ovako:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ s_{1} & s_{2} & \cdots & s_{n-1} & s_{n} \end{pmatrix}$$

gdje gornja vrsta označava indekse x-ova predstavljenih u definiciji 2.2.

Digrafovi imaju sljedeća svojstva:

1. Za svako J_{a} postoji makar jedan J_{b} takvo da $J_{a} \to J_{b}$. Štaviše, moguće je uvijek izabrati $a \neq b$, osim u slučaju da je $n = 2$. Ovo slijedi iz definicija 2.1 i 2.2;

2. Za svako J_a postoji makar jedan J_b takav da $J_b \to J_a$. Šta više, moguće je izabrati $a \neq b$ osim u slučaju kada je n parno i $b = \frac{n}{2}$ (dokaz je naveden u Block i Coppel 1992: 8);
3. Digraf uvijek ima čvor koji sadrži petlju (slika se sam u sebe).

Dokaz. Imamo da je $f(x_1) > x_1$ i $f(x_n) < x_n$. Izaberimo k takvo da:

$$k = \min\{1 \le i < n : f(x_i) \ge x_{i+1} \wedge f(x_i) \le x_{i+1}\}$$

Odavdje vidimo da važi $J_k \to J_k$. Ovo ćemo označavati kao $J_k \circlearrowleft$. □

Ciklusi i njihove konstrukcije

Definicija 2.3. U n-orbiti, ciklus:

$$J_0 \to J_1 \to \cdots J_{n-1} \to J_0$$

dužine n u digrafu se naziva *fundamentalnim ciklusom* (FC) ako J_0 sadrži krajnju tačku c takvu da je $f^k(c)$ krajnja tačka od J_k za $1 \le k < n$, gdje su intervali $J_0, \ldots, J_{n-1}$ intervali iz leme 1.8.

Fundamentalni ciklus uvijek postoji i jedinstven je. U FC-u se neki interval mora ponavljati najmanje dva puta između $J_0, \ldots, J_{n-1}$, jer digraf ima samo $n-1$ intervala. S druge strane, svaki interval se mora ponoviti najviše dva puta, jer interval J_k ima dvije krajnje tačke.

Definicija 2.4. Ciklus digrafa nazivamo primitivnim ako se ne sastoji od ciklusa manje dužine ponovljenim više puta.

Lema 2.5. Pretpostavimo da f ima periodičnu tačku perioda $n > 1$. Ako taj digraf sadrži primitivni ciklus:

$$J_0 \to J_1 \to \cdots J_{m-1} \to J_0$$

tada f ima periodičnu tačku y perioda m, takvu da važi: $f^k(y) \in J_k$, $0 \le k < m$.

Dokaz. Kako je $J_1 \subseteq f(J_0)$, $J_2 \subseteq f(J_1)$, …, $J_k \subseteq f(J_{k-1})$, iz leme 1.8 zaključujemo da postoji y koje pripada J_0 za koje važi $f^m(y) = y, f^k(y) \in J_k$ $(0 \le k < m)$. Odatle slijedi da je m period od y ili da je period od y djelilac m. Ako y nije krajnja tačka J_0, tada je m period jer je ciklus primitivan. Ako je y krajnja tačka J_0, y je dio n-orbite. Dakle, $n|m$, no ciklus je primitivan, pa je $n = m$, tj. m je period od y. □

Lema 2.6 (Strafinova lema). Neka je funkcija f neprekidna, $f: J \to J$ i ima period 3. Tada f ima sve ostale periode, odnosno, $3 \rhd m \rhd 2 \rhd 1$.

Dokaz. Ciklične permutacije funkcije perioda tri možemo predstaviti na sledeća dva načina:

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Odogovarajući digrafovi ove dvije permutacije su:

$$J_1 \leftrightarrows J_2 \circlearrowleft$$

$$\circlearrowleft J_1 \leftrightarrows J_2$$

za permutacije P_1 i P_2 redom. Sada, vidimo da ove permutacije imaju period 1 (jer svaka ima čvor koji sadrži petlju). Imaju i period 2:

$$J_1 \to J_2 \to J_1$$

Konstruišemo digraf za proizvoljan period veći od tri na sljedeći način:

$$J_2 \to J_1 \to \underbrace{J_2 \to J_2 \to \cdots \to J_2}_{m-1 \text{ puta}}$$

za $m > 2$. Iz ove konstrukcije vidimo da sve funkcije perioda tri imaju proizvoljan period. Period tri implicira haos! □

Lema 2.7. Neka f ima periodičnu orbitu neparnog perioda $n > 1$ i neka nema manje neparne periode (minimalno n) u intervalu 1 do n. Tada će raspored njenih iteracija da izgleda ovako:

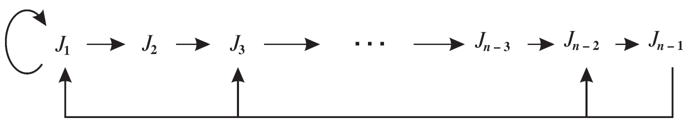
$$f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \ldots < a < f(a) < f^3(a) < \ldots < f^{n-2}(a)$$

ili u inverznom poretku:

$$f^{n-2}(a) < f^{n-4}(a) < \ldots < f(a) < a < f^2(a) < \ldots < f^{n-1}(a)$$

gdje je a središnja tačka n-orbite.

Njegov digraf se prestavlja na sljedeći način:



Dokaz. Rastavimo FC na dva primitivna ciklusa jednog parne, a drugog neparne dužine. Kako nemamo manje neparne periode to je dužina ciklusa sa neparnim periodom 1. Dakle imamo interval koji se slika sam u sebe, odnosno imamo čvor sa petljom. Digraf FC-a izgleda ovako:

$$J_1 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1$$

Nemoguće je da imamo $J_i = J_k$ $(1 < i < k < n)$, jer bismo dobili ciklus manje dužine. Dakle svi ovi ciklusi su disjunktni i čine permutaciju intervala. Sada konstruišimo ovaj digraf. Kako je $J_1 \to J_2$ to se J_1 slika u jedan od susjednih intervala (sa kojima dijeli tačno jednu zajedničku tačku). Dakle neka je $J_1 = [a, f(a)]$. Zaključimo tada koje su krajnje tačke J_2. Krajnje tačke J_2 moraju biti $f^2(a)$ i a, tim redoslijedom. Nemoguće je da se slika desno, jer bi se J_3 slikao ponovo u J_1, što je nemoguće, jer dobijamo ciklus neparnog perioda što je kontradikcija sa uslovom. Dakle, on se može slikati samo lijevo od J_1. Ponavljajući ovaj postupak, upravo dobijamo konstrukciju datu u lemi. □

Dokaz teoreme Šarkovskog

Lema 2.8. Ako f ima periodičnu orbitu neparnog perioda $n > 1$ onda f ima bilo koji neparan period veći od n i proizvoljan paran period.

Dokaz. Neka je n minimalno i $m = 2p < n$. Tada je:

$$J_{n-1} \to J_{n-m} \to J_{n-m+1} \to \cdots \to J_{n-1}$$

primitivan ciklus. Ako je $m > n$ (parno ili neparno) imamo:

$$J_1 \to J_2 \to J_3 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_1 \to \underbrace{J_1 \to \cdots \to J_1}_{m-n+1 \text{ puta}}$$

Lema 2.9. Ako je d periodična tačka f sa periodom n onda za bilo koje h, d je periodična tačka od f^h sa periodom $\frac{n}{(h, n)}$, gdje sa (h, n) označavamo njihov najveći zajednički djelilac. Obrnuto, ako je d periodična tačka od f^h sa periodom m, onda je d periodična tačka za f sa periodom $\frac{mh}{p}$, gdje $p \mid h$ i $(p, m) = 1$.

Dokaz. Neka d ima period n za f i neka je $m = \frac{n}{(h, n)}$. Tada:

$$f^{mh}(c) = f^{\frac{nh}{(h,n)}}(c) = c$$

S druge strane, ako $f^{kh}(d) = d$, tada $n \mid kh$, pa neka je $kh = vn$. Dobijamo:

$$k = \frac{vn}{h} = m\frac{v(n, h)}{h} = m\frac{(vn, vh)}{h} = m\frac{(kh, vh)}{h} = m(v, k)$$

što znači da $m \mid k$. Neka je c periodična tačka sa periodom m za f^h, onda d ima period n za f, sa $n = \frac{mh}{v}$. Kako je:

$$m = \frac{n}{(h, n)} = \frac{nv}{h} \Rightarrow h = v(h, n) = ve$$

$$(ve, ve) = \big(ve, m(h, n)\big) = (h, n) = e \Rightarrow (v, m) = 1. \;\square$$

Dokaz teoreme Šarkovskog. Neka je $n = 2^t q$. Neka je $q = 1$. Ovim dokazujemo desni rep poređenja Šarkovskog, tj. želimo pokazati za bilo koje $t > e$ period 2^t implicira period 2^e. Posmatrajmo funkciju $g = f^{\frac{m}{2}}$. Prema lemi 2.9, $h = \frac{m}{2} = 2^{e-1}$, $n = 2^t$. Dakle, g ima periodičnu tačku perioda:

$$\frac{n}{(h, n)} = \frac{2^t}{(2^t, 2^{e-1})} = 2^{t-e+1}$$

pa g ima periodičnu tačku perioda 2. Primijenimo li drugi dio leme 2.9 za $h = 2^{e-1}$, $m = 2$. Periodična tačka f^2 sa periodom 2 je periodična tačka f sa periodom:

$$\frac{2 \cdot 2^{e-1}}{v} = \frac{2^e}{v}$$

Kako je $(v,2) = 1$ što znači da je $v = 1$, odnosno period od f je 2^e.

Dokažimo sada i lijevi rep poređenja Šarkovskog. Već smo pokazali da bilo koji neparni period $n > 1$ implicira bilo koji drugi neparni period veći od n i bilo koji parni. Uzmimo da je $n = 2^t q$, gdje je q neparno i veće od 1. Ostalo je još pokazati da period $2^t q$ implicira period $2^t r$, gdje je r:

1. parno,
2. neparno veće od q.

Neka je $g = f^{2^t}$. Tada g ima periodičnu tačku perioda:

$$\frac{2^t q}{(2^t q, 2^t)} = q$$

Prema lemi 2.8 g ima periodičnu tačku perioda r. Prema lemi 2.9 $h = 2^t$, $m = r$ to će biti periodična tačka sa periodom:

$$\frac{2^t r}{p} = 2^t r$$

što slijedi iz činjenice da je r parno i $(p, r) = 1 \Rightarrow p = 1$. Za r neparno $p = 2^s$, pa imamo periodičnu tačku perioda $2^e r$, $e \leq t$. Za $e = t$ smo već dokazali, pa je ostalo da dokažemo za $e < t$. Neka je $n = 2^e r$. Kako je $m = 2^e (2^{t-e}) r$ slijedi da f ima periodičnu tačku perioda m. Iz ovog dokaza, Strafinove leme i leme 2.8 zaključujemo da je poredak perioda sljedeći:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots 2^2 \cdot 3 \rhd \cdots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

što je i trebalo dokazati. □

Konstrukcija ciklusa oblika $2(2k+1)$

Definicija 3.1. Štefanov ciklus predstavlja ciklus od dva skupa intervala (C_1 i C_2), gdje se sve tačke iz podintervala C_1 slikaju u sve tačke podintervala C_2. Ako je Štefanov ciklus ujedno i minimalan, nazivaćemo ga finalni ciklus.

Predstavljamo konstruktivni dokaz finalnog ciklusa – C (Abdulla *et al.* 2013):

Podijelimo intervale u dva podciklusa sa jednakim brojem elemenata:

$$C_1 = \{J_1, J_2, \ldots, J_{(2k+1)-1}\}, C_1 = \{J_{(2k+1)+1}, J_{(2k+1)+2}, \ldots, J_{2(2k+1)-1}\}$$

Ciklus C_1 poprima jedan od ova dva oblika:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k+1 & k+2 & \cdots & 2k & 2k+1 \\ k+1 & 2k+1 & \cdots & k+2 & k & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k+1 & k+2 & \cdots & 2k & 2k+1 \\ 2k+1 & 2k & \cdots & k & k-1 & \cdots & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

A ciklus C_2 jedan od sljedeća dva oblika:

$$\begin{pmatrix} 2k+2 & 2k+3 & \cdots & 3k+2 & 3k+3 & \cdots & 4k+1 & 4k+2 \\ 3k+2 & 4k+2 & \cdots & 3k+3 & 3k+1 & \cdots & 2k+3 & 2k+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2k+2 & 2k+3 & \cdots & 3k+2 & 3k+3 & \cdots & 4k+1 & 4k+2 \\ 4k+2 & 4k+1 & \cdots & 3k+1 & 3k & \cdots & 2k+2 & 3k+2 \end{pmatrix}$$

Radi jednostavnosti, pokazaćemo konstrukciju ciklusa C konstruisanog od prve varijante ciklusa C_1 i prve varijante ciklusa C_2. Započinjemo spajanjem čvorova koji sadrže petlju, kako bismo obezbijedili da finalni ciklus C ima samo jedan čvor koji sadrži petlju. Kada bismo ih povezali sa bilo kojim drugim čvorom, ne bismo zadovoljili taj uslov. Dakle imamo:

$$J_{k+1} \leftrightarrows J_{3k+2}$$

Kako se J_{k+1} slika u J_k pod f^2, to će se J_{3k+2} slikati u J_k pod f:

$$J_{k+1} \leftrightarrows J_{3k+2} \to J_k \to \cdots$$

Ovaj postupak se nastavlja do trenutka kada se J_1 slika u J_{k+1}:

$$J_{k+1} \leftrightarrows J_{3k+2} \to J_k \to \cdots \to J_1 \to J_{k+1}$$

Još je ostalo da odredimo koji čvor će sadržati petlju u clikusu C. To će upravo biti čvor J_{2k+1}. Kako bismo odredili u koje čvorove se slika J_{2k+1}, potrebno je ispisati permutaciju ciklusa C. Kako se svi čvorovi sem J_{2k+1} i J_{2k+2} slikaju u samo jedan drugi čvor, premutacija ciklusa C je jednoznačno određena i sistemom eliminacije pronalazimo u koje se čvorove slika J_{2k+1}. Time je završena konstrukcija ciklusa C.

Konstrukcija ciklusa oblika $2^r(2k+1)$

Pokazali smo već konstrukciju za $r = 1$. Ako analogno pratimo konstrukciju za $r = 1$ lako pronalazimo minimalnu $2^2(2k+1)$ orbitu. Međutim, postavlja se pitanje, da li je to jedini mogući način da konstruišemo minimalne $2^r(2k+1)$ orbite? Taj rezultat izlažemo u ovom odeljku.

Definicija 4.1. Ciklus zovemo Štefan-konstruktibilnim, ako je moguće sastaviti minimalan Štefanov ciklus od dva skupa intervala, odnosno ako se sve tačke iz podintervala C_1 slikaju u sve tačke podintervala C_2.

Teorema 4.2. Svaki ciklus oblika $2^r(2k+1)$ gdje je $r \geq 2$, $k \geq 0$, je Štefan-konstruktibilan akko iz oba skupa intervala iz čvora koji sadži petlju izlazi samo jedna grana. Štaviše, ovo je jedini način da se konstruišu minimalni Štefanovi ciklusi.

Dokaz. Prvo, iz definicije znamo da se radi o ciklusima C_1 i C_2. Sada pretpostavimo da ne važi da je broj grana iz čvora koji sadrži petlju jednak jedan za oba podciklusa. Bez umanjenja opštosti, neka se čvor koji sadrži petlju C_1 račva na m grana a C_2 na n grana. Neka su to čvorovi I_1 i I_2. Kako se podciklusi povezuju čvorovima koji sadrže petlju, tada imamo:

$$I_1 \leftrightarrows I_2$$

jer svaki digraf sadrži maksimalno jednu petlju. Neka se I_1 pod f^2 slikao u $J_1, J_2, \dots, J_m$, tada se pod f I_2 slika u $J_1, J_2, \dots, J_m$. Analogno neka se I_2 pod f^2 slikao u $K_1, K_2, \dots, K_n$. Tada se pod f svaki od intervala $J_1, J_2, \dots$ $\dots, J_m$ slika u svaki od intervala $K_1, K_2, \dots, K_n$ što je nemoguće za nasumične m i n, jer se maksimalno jedan interval može slikati u identičan interval. Razmotrimo preostali slučaj: $m = 1$, n proizvoljno. Imamo situaciju da se sada J_1 slika u sve $K_1, K_2, \dots, K_n$, ali i da se oni svi slikaju u $w > 1$ intervala u koje se slikao u J_1 pod f^2, što se svodi na prethodni slučaj. Dakle zaključujemo da $m = n = 1$, što je i trebalo dokazati.

Po ovoj konstrukciji ciklus C_1 poprima sljedeće oblike:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{r-2}p & 2^{r-2}p+1 & \cdots & 2^{r-1}p-1 & 2^{r-1}p \\ 2^{r-1}p & 2^{r-1}p-1 & \cdots & 2^{r-2}p+1 & 2^{r-2}p-1 & \cdots & 1 & 2^{r-2}p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2^{r-2}p & 2^{r-2}p+1 & \cdots & 2^{r-1}p-1 & 2^{r-1}p \\ 2^{r-2}p+1 & 2^{r-1}p & \cdots & 2^{r-2}p+2 & 2^{r-2}p & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A ciklus C_2 ove oblike:

$$\begin{pmatrix} 2^{r-1}p+1 & 2^{r-1}p+2 & \cdots & 3\cdot 2^{r-2}p & 3\cdot 2^{r-2}p+1 & \cdots & 2^{r}p-1 & 2^{r}p \\ 2^{r}p & 2^{r}p-1 & \cdots & 3\cdot 2^{r-2}p+1 & 3\cdot 2^{r-2}p-1 & \cdots & 2^{r-1}p+1 & 3\cdot 2^{r-2}p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2^{r-1}p+1 & 2^{r-1}p+2 & \cdots & 3\cdot 2^{r-2}p & 3\cdot 2^{r-2}p+1 & \cdots & 2^{r}p-1 & 2^{r}p \\ 3\cdot 2^{r-1}p+1 & 2^{r}p & \cdots & 3\cdot 2^{r-2}p+2 & 3\cdot 2^{r-2}p & \cdots & 2^{r-1}p+2 & 3\cdot 2^{r-2}p+1 \end{pmatrix}$$

gdje je $p = 2k+1$. □

Primjer konstrukcije za $2^2(2k+1)$

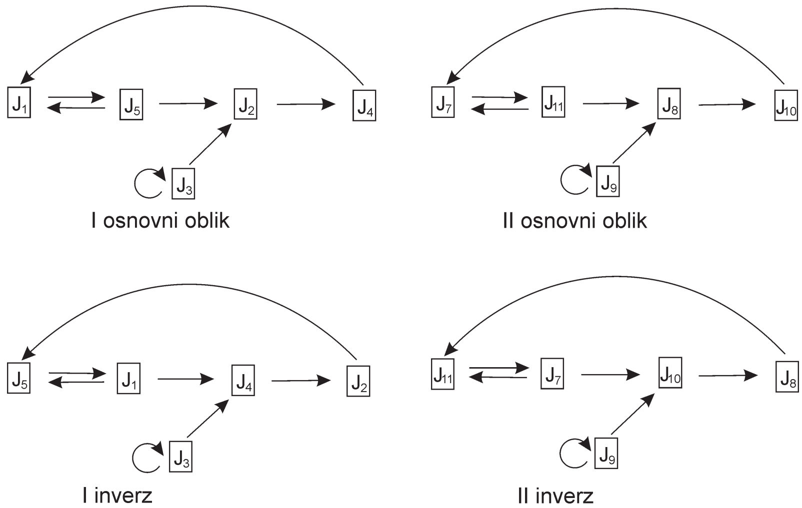
Uzmimo $k = 1$. Konstruisanje ciklusa C_1 i C_2 vršimo prema prethodno navedenom postupku. Varijante ciklusa C_1 su:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a ciklusa C_2:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 12 & 11 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

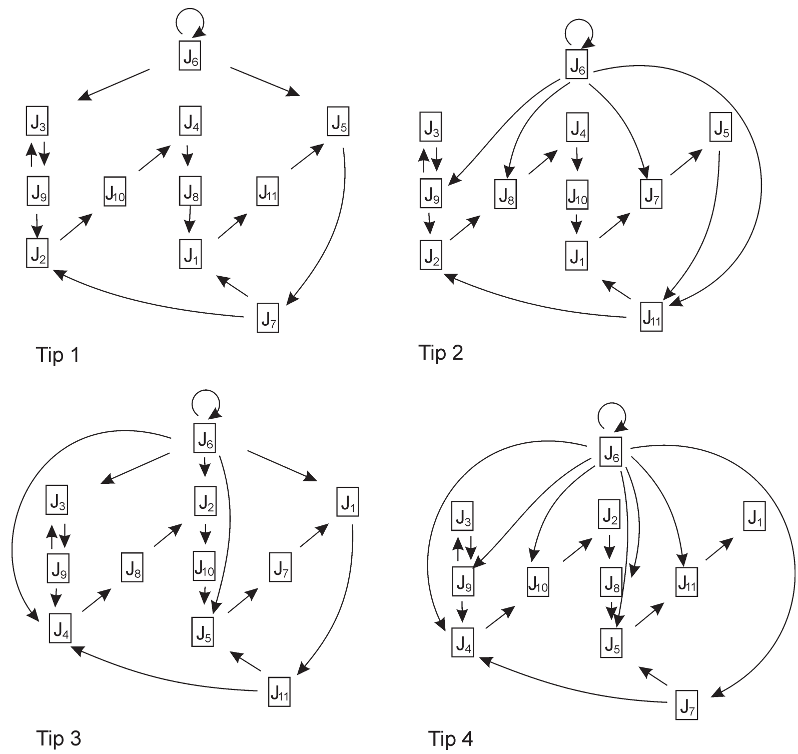
Kao što smo prikazali u prethodnom odjeljku, na sličan način vršimo kontrukciju ciklusa oblika $2^r(2k+1)$, u ovom slučaju konkretno za $r = 2$ i $k = 1$ (slika 1).



Slika 1.
Digraf ciklusa C_1, C_2 za $r = 2$, $k = 1$ (osnovni oblik i inverz)

Figure 1.
Digraph of the cycles C_1, C_2 for $r = 2$, $k = 1$ (above – basic form, below – inverse)

Tada dobijamo 4 mogućnosti za finalni ciklus C. Razlikujemo 4 tipa ovih ciklusa opisanih digrafovima datim na slici 2.



Slika 2.
Digraf finalnog ciklusa za $r = 2$, $k = 1$ (osnovni oblik i inverz)

Figure 2.
Digraph of the final cycle for $r = 2$, $k = 1$ (basic form and inverse)

Literatura

Abdulla A. U., Abdulla R. U., Abdulla U. G. 2013. On the minimal 2(2*k*+1)-orbits of the continuous endomorphisms on the real line with application in Chaos theory. *Journal of Difference Equations and Applications*, **19** (9): 1395.

Block L. S., Guckenheimer J., Misiurewich M., Young L. S. 1980. Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps. *Lecture Notes in Mathematics*, **819**: 18.

Block L. S., Coppel W. A. 1992. *Dynamics in One Dimension*. Springer

Burns K., Hasselblatt B. 2011. The Sharkovsky theorem: A natural direct proof. *American Mathematical Monthly*, **118** (3): 229.

Sharkovsky A. N. 1964. Coexistence of Cycles of a Continuous Transformation of a Line into itself. *Ukrains'kyi matematychnyi zhurnal*, **16**: 61.

Tanja Gavrić and Dragan Marković

Periodic Orbits and Stefan-Constructibility

A modern proof of Sharkovsky's theorem is given in this paper. We discuss periods of functions, digraphs and introduce terms such as Stefan's cycles and Stefan constructibility. Results to date are discussed in the paper, such as the constructions of minimal Stefan cycles, in particular cycles of the form $2(2k+1)$. In the last section, new results are given regarding the generalization of these constructions, cycles of the form $2^r(2k+1)$, and examples of these constructions represented by digraphs.