Vuk Radović

Kvantni haos u faznim prelazima

Teorija haosa se bavi proučavanjem haotičnih sistema, odnosno sistema koji ispoljavaju eksponencijalne osetljivosti na promene početnih uslova. Razvijanje kvantne mehanike početkom 20. veka ponudilo je rešenja za mnoge nerazjašnjene fizičke probleme. Stoga je bilo prirodno potražiti uzrok haosa na kvantnom nivou. Međutim, kvantna mehanika jasno ukazuje na to da haos kao fundamentalno svojstvo ne postoji, jer je svaki kvantni sistem periodičan u nekom dovoljno velikom konačnom vremenu. S druge strane, primećeno je da svi klasični haotični sistemi imaju zajedniču statistiku svojstvenih stanja kada se posmatraju kvantno. Zbog toga se danas pod pojmom kvantni haos podrazumeva oblast koja proučava statistike i klasifikaciju svojstvenih stanja kvantnih sistema.

Na osnovu energetskih spektara kvantni sistemi se mogu podeliti na: lokalizovani (integrabilni) i delokalizovani (haotični). Jedna od karakteristika haotičnih sistema jeste da raspodela energija prati Dajsonovu (polukružnu raspodelu), odnosnu raspodelu koja opisuje statistiku svojstvenih stanja slučajnih matrica. Takođe, kao karakteristika haotičnosti sistema uvodi se diverzitet stanja, odnosno raspodela diverziteta svih stanja. Diverzitet se definiše kao:

$$w = \frac{e^S}{N},$$

gde je N – dimenzija prostora stanja, a S Fon Nojmanova entropija stanja $\vec{v}$ difinisana kao:

$$S(\vec{v}(v_1, v_2, \ldots, v_N)) = -\sum_{i=1}^{N} | v_i^2 \log(v_i^2)|.$$

U slučaju integrabilnih stanja, raspodela diverziteta je koncentrisana oko 0.00 ukoliko je sistem lokalizovan u realnom prostoru, odnosno oko 0.70 ukoliko je lokalizovan u faznom prostoru. Dok razni haotični sistemi imaju raspodelu koja je koncentrisana oko drugih karakterističnih brojki (npr. 0.49), zavisno od tipa haotičnog sistema.

U ovom radu, smo se koncentrisali na proučavanje dva integrabilna sistema koji poseduju određene karakteristike koje su na granici haotičnih i integrabilnih sistema. To su Obri-Andre model i model konformne kvantne mehanike. Pokazali smo da, nasuprot tome što su ovi sistemi intuitivno slični, među njima nema univerzalne sličnosti kao kod drugih haotičnih sistema. Kako bi ovaj argument bio potpun, uveli smo i veličinu gustinu diverziteta koja je jasno ukazala na njihove razlike.

Obri-Andre model je model u jednoj dimenziji u kojem je potencijal periodičan, ali iracionalno srazmeran dimenziji prostora. Ovo dovodi do pojave i lokalizovanih i slabo delokalizovanih stanja u energetskom spektru pri određenim vrednostima amplitude potencijala. Posebno su interesantna stanja koja se nalaze na prelazu između ova dva tipa stanja. Takva stanja su samo-slična i liče na fraktale. U ovom slučaju potencijal je dat sa:

$$V(x) = \lambda \cos(\omega x),$$

gde je λ amplituda potencijala, a ω njegova frekvencija.

S druge strane, konformna kvantna mehanika je model čiji je hamiltonijan invarijantan na konformnu grupu transformacija. U jednoj dimenziji se ove osobine svode na zakon održanja energije i invarijantnost pri skaliranju – što je upravo osobina fraktalnih stanja. Može se pokazati da je potencijal dat sa:

$$V(x) = \frac{\lambda}{x^2}.$$

Da bi se rešio svojstveni problem ova dva sistema, korišćen je metod konačnih razlika.

Dobijeni rezultati za Obre-Andri model ukazuju na to da se pri apsolutnoj vrednosti amplitude manjoj od 1 dobijaju delokalizovana stanja,

Vuk Radović (1998), Beograd, Primućura Žarka 27/1, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Đorđe Radičević, Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline St N, Waterloo, ON N2L 2Y5, Canada

odnosno vrednosti diverziteta su skoncentrisane između 0.4 i 0.5. Za ostale vrednosti amplitude dobijaju se diverziteti skoncentrisani oko nule, što odgovara lokalizovanim stanjima. Takođe, pri vrednosti amplitude 1 dobijene su takozvane fraktalne talasne funkcije.

S druge strane, sistem konformalne kvantne mehanike pokazuje da se za male vrednosti potencijala dobijaju diverziteti koji teže vrednosti 0.7 (slobodna čestica), dok se za velike vrednosti dobijaju diverziteti skroncentrisani oko nule (zarobljena čestica). Ovo sugeriše da ova dva modela ipak nisu slična. Kako bi se ovo pokazalo, bilo je potrebno uvesti dijagnostiku koja će jasno pokazati da svojstvena stanja Obri-Andre modela imaju fraktalna svojstva, dok stanja konformne kvantne mehanike to nemaju. U tu svrhu uveli smo novu veličinu, gustinu diverziteta, odnosno računali smo diverzitete po segmentima prostora. Ova veličina do sada nije korišćena, ali u njoj vidimo potencijalni indikator „fraktalnosti” stanja. Ono što smo očekivali jeste da samo-slična talasna funkcija ima identične raspodele gustine diverziteta na svim segmentima. Upravo to i jeste bio slučaj sa Obri-Andre modelom. S druge strane, u slučaju konformne kvantne mehanike dobili smo da različiti segmenti mogu bili lokalizovani u realnom ili u faznom prostoru. To sugeriše da je konformna kvantna mehanika, uprkos svojstvu invarijantnosti pri skaliranju, ipak integrabilan sistem, tj. da nema ništa zajedničko sa Obri-Andre modelom.

Zaključak je da se konformna kvantna mehanika definitivno svrstava u klasu integrabilnih sistema, dok Obri-Andre model ostaje jedini primer jednodimenzionog sistema sa dve moguće vrste stanja u svom spektru.

Quantum Chaos in Phase Transitions

Quantum chaos is a field that studies universal properties of spectra of quantum systems. Very roughly, one can distinguish two universal types of states in a spectrum: localized (integrable) and delocalized (chaotic). Our understanding of this rough dichotomy as a function of the quantum-mechanical potential is not complete, but is rather important for a deep understanding of quantum mechanics. In particular, the behavior of systems near localization/delocalization phase transitions is poorly understood. Therefore, in this paper we investigate the spectrum of a quantum particle with conformal symmetry and compare it with that of the well-known Aubry-André model, which is known to exhibit a delocalization phase transition. We analyse the spectra of these models in various ways, and we introduce a new diagnostic – the density of diversities – that clearly shows the difference between two systems. Our results suggest that, contrary to naive expectations, conformal quantum mechanics does not emerge at the localization/delocalization phase transition.