Jelena Mrdak

Primena nadrealnih brojeva u igrama

U ovom radu su predstavljeni nadrealni brojevi, pseudo brojevi i nim-brojevi. Pomoću njih su analizirane pobedničke strategije nekih matematičkih igara: kako jedne klasične koja se može naći u postojećoj literaturi (Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K. 2001. Winning Ways for your Mathematical Plays. *Wellesley), tako i jedne originalne.*

1. Nadrealni brojevi

Nadrealne brojeve, kao izvesno proširenje skupa realnih brojeva, konstruisao je Džon Konvej, a podroban opis konstrukcije kao i njihova primena može se naći u njegovoj knjizi *On numbers and games* (Conway 1976). Oni predstavljaju skup brojeva koji sadrži realne brojeve i beskonačne ordinalne brojeve. Konvej u svojoj induktivnoj konstrukciji koristi termin „dani”, pa je tako svaki nadrealni broj stvoren izvesnog dana, i svaki nadrealni broj čine dva skupa – levi i desni. U narednim redovima prikazujemo Konvejevu konstrukciju i dajemo neke osnovne osobine ovih brojeva, čiji se dokazi mogu naći u literaturi (Conway 1976).

1.1. Konvejeva pravila

Princip konstrukcije

Ako su L i D dva skupa prethodno konstruisanih brojeva, takva da nijedan član skupa L nije veći ili jednak nijednom članu skupa D, tada postoji broj $x = \{L \mid D\}$. Svi brojevi su konstruisani na ovaj način.

Napomena

Ako je $x = \{L \mid D\}$, tada ćemo sa x_L označavati tipičan član skupa L, a sa x_D tipičan član skupa D. Stoga, x ćemo pisati kao $x = \{x_L \mid x_D\}$.

$x = \{a, b, c, \ldots \mid -d, e, f, \ldots\}$ znači da je $x = \{L \mid D\}$, gde su a, b, c … tipični članovi skupa L, i d, e, f … tipični članovi skupa D. Takođe, u

Jelena Mrdak (1996), Beograd, Husinskih rudara 21/20, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Nikola Milosavljević, Prirodnomatematički fakultet Univerziteta u Nišu

nastavku ćemo nadrealan broj zvati samo brojem i, pritom, podrazumevati da važi sledeća aksioma:

Aksioma 1.1. $x = \{x_L \mid x_D\}$ je broj $\Rightarrow (\forall x_L)(\forall x_D)(x_L \not\geq x_D)$.

Definicije

Definicija 1.1. $(x \leq y) \Leftrightarrow (x_L \not\geq y \wedge x \not\geq y_D)$.

Definicija 1.2. $(x = y) \Leftrightarrow (x \leq y \wedge y \leq x)$.

Definicija 1.3. $(x < y) \Leftrightarrow (x \leq y \wedge y \not\leq x)$,

$(x < y) \Leftrightarrow (y > x)$.

Definicija 1.4. $x + y = \{x_L + y, x + y_L \mid x_D + y, x + y_D\}$.

Definicija 1.5. $-x = \{-x_D \mid -x_L\}$.

Definicija 1.6. $x - y = x + (-y) =$

$$= \{x_L + (-y), x + (-y_D) \mid x_D + (-y), x + (-y_L)\}.$$

Nulti dan

Sa $d(x) \in \{1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots\}$ označavamo dan konstruisanja broja x. Nameće se pitanje: Koji je broj konstruisan nultog dana?

Prema principu konstrukcije, levi i desni skup čine prethodno konstruisani brojevi, a kako do nultog dana nijedan broj nije konstruisan, levi i desni skupovi će biti prazni. Prema tome, naš prvi broj biće:

$$0 = \{\varnothing \mid \varnothing\}.$$

Prvi dan

Pošto smo definisali nulu, sada možemo definisati i brojeve konstruisane prvog dana. Možemo staviti nulu u levi skup $x = \{0 \mid\}$ i možemo je staviti u desni skup $y = \{\mid 0\}$. Nula ne može biti u oba skupa jer $\{0 \mid 0\}$ nije broj.

Kako poredimo x i y sa nulom?

Dokazaćemo da je $x > 0$. Treba da pokažemo da je $x \geq 0$ i $0 \not\leq x$. Prva nejednakost se lako pokazuje. Da bi važilo $0 \not\geq x$, potrebno je da pokažemo da postoji neko $x_L \in L$, za koje je $x_L \geq 0$, što $x_L = 0$ ispunjava. Dakle, $x > 0$. Slično pokazujemo i da važi $y < 0$.

Broj x ćemo nazvati pozitivno jedan, a broj y negativno jedan.

Dakle, prvog dana su konstruisani brojevi:

$$1 = \{0 \mid\} \text{ i } -1 = \{\mid 0\}.$$

Iz definicije negacije možemo da vidimo da je $y = -x = -1$. Lako se proverava da je $-1 < 1$, te ćemo to prepustiti čitaocu.

Primetimo da je 0 konstruisana pre 1 i –1. Zapravo, prema definiciji broja, ako je neki broj x u levom ili desnom skupu broja y, tada x mora biti konstruisan pre broja y.

Definicija 1.7. Kažemo da je broj x *jednostavniji* od broja y, ako je konstruisan pre broja y, tj. ako je $d(x) < d(y)$. Na primer, 0 je jednostavniji broj od 1 i –1.

Stavljanjem 0, 1, ili –1 u levi ili desni skup, dobijamo brojeve nastale drugog dana:

$$\{1 \mid\} \ \{-1 \mid\} \ \{0, 1 \mid\}$$

$$\{0,-1\,|\}\ \{-1,1\,|\}\ \{-1,0,1\,|\}$$
$$\{|\,1\}\ \{|\,-1\}\ \{|\,0,1\}$$
$$\{|\,0,-1\}\ \{|\,-1,1\}\ \{|\,-1,0,1\}$$
$$\{-1\,|\,0\}\ \{-1\,|\,1\}\ \{-1\,|\,0,1\}$$
$$\{0\,|\,1\}\ \{-1,0\,|\,1\}.$$

Koristeći ove brojeve možemo nastaviti sa konstrukcijom. Kako takvih brojeva ima mnogo, proverićemo da li neka svojstva koja važe za realne brojeve takođe važe i za nadrealne brojeve.

1.2. Osnovna svojstva

Kao što smo ranije spomenuli dokazi ovih svojstava mogu se naći u literaturi (Conway 1976).

1. Svojstva uređenosti i jednakosti

Podsetimo se da je $x \leq y$ ako i samo ako važi $(x_L \ngeq y \wedge x \ngeq y_D)$.

Teorema 1.1. Za svaki broj x važi:

(i) $x \ngeq x_D$,

(ii) $x_L \ngeq x$,

(iii) $x \leq x$,

(iv) $x = x$.

Teorema 1.2. (TRANZITIVNOST) Ako je $x \geq y$ i $y \geq z$, onda je $x \geq z$.

Teorema 1.3. Za svaki broj x važi $x_L < x < x_D$.

Teorema 1.4. Ako važi $x \ngeq y$, tada je $x < y$.

Kako su svaka dva elementa skupa nadrealnih brojeva uporediva i relacija $\leq$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, zaključujemo da je relacija $\leq$ na skupu nadrealnih brojeva relacija potpunog (linearnog) poretka.

2. Svojstva sabiranja

Teorema 1.5. Za svako x, y, z imamo:

(i) $x + 0 \equiv x$,

(ii) $x + y \equiv y + x$,

(iii) $(x + y) + z \equiv x + (y + z)$.

3. Svojstva negacije

Teorema 1.6.

(i) $-(x + y) = -x + (-y)$,

(ii) $-(-x) \equiv x$,

(iii) $x + (-x) = 0$.

Kao što vidimo, operacija sabiranja na skupu nadrealnih (pseudo) brojeva je asocijativna i komutativna. Takođe, postoji neutral $(e = 0)$ i svaki broj x ima svoj inverz $-x$. Na osnovu ovoga zaključujemo da je sabiranje na skupu brojeva Abelova grupa.

4. Svojstva sabiranja i uređenosti

Teorema 1.7. $(y \geq z) \Leftrightarrow (x + y \geq x + z)$.

Teorema 1.8. Ako je x broj, tada je $-x$ broj.

Teorema 1.9. Ako su x i y brojevi, tada je i $x + y$ broj.

1.3. Pojednostavljivanje

Podsetimo se brojeva konstruisanih drugog dana:

$$\{1\,|\} \ \{-1\,|\} \ \{0, 1\,|\}$$
$$\{0, -1\,|\} \ \{-1, 1\,|\} \ \{-1, 0, 1\,|\}$$
$$\{|\,1\} \ \{|\,-1\} \ \{|\,0, 1\}$$
$$\{|\,0, -1\} \ \{|\,-1, 1\} \ \{|\,-1, 0, 1\}$$
$$\{-1\,|\,0\} \ \{-1\,|\,1\} \ \{-1\,|\,0, 1\}$$
$$\{0\,|\,1\} \ \{-1, 0\,|\,1\}.$$

Kako bi bilo potrebno mnogo vremena da poredimo svaki od ovih brojeva sa 0, 1 i –1, želimo da pronademo način koji bi značajno ubrzao proces. Razmatrajmo broj $x = \{x_L | x_D\}$. Kada poredimo x sa nekim brojem, nas jedino zanima najveći element skupa L i najmanji element skupa D. Dakle, očekujemo da je $\{1|0\} = \{0,1| \ \} = \{-1,1| \ \} = \{-1,0,1| \ \}$, što nas dovodi do sledećih teorema. Zbog operativnog karaktera narednih tvrđenja i zarad kompletnosti, sledeće dve teoreme dajemo sa kratkim dokazima preuzetim iz literature (Conway 1976).

Teorema 1.10. (i) Neka je $x = \{x_L | x_D\}$, gde $L \neq \emptyset$, i $a = \{y, x_L | x_D\}$, gde je $y < x_L$ za svako x_L. Tada je $a = x$.

(ii) Neka je $x = \{x_L | x_D\}$, gde $D \neq \emptyset$, i $b = \{x_L | x_D, z\}$, gde je $z > x_D$ za svako x_D, tada je $b = x$.

Dokaz. (i) Da bismo dokazali jednakost, potrebno je da dokažemo $x \leq a$ i $a \leq x$. Prema Teoremi 1.1, znamo da važi $x_L \ngeq a$ i $x \ngeq x_D$, odnosno $x \leq a$. Sada, treba da pokažemo $a \leq x$, odnosno $a_L \ngeq x$ i $a \ngeq x_D$. Koristeći Teoremu 1.1, znamo da važi $a \ngeq x_D$ i $x_L \ngeq x$. Iz $y < x_L < x$ sledi $y < x$, što je ekvivalentno sa $y \ngeq x$. Dakle, $x = a$.

(ii) Slično kao (i).

Posledica. Broj $x = \{x_L | x_D\}$ je jednak broju $x = \{\max(x_L) | \min(x_D)\}$.

Ova teorema nam skraćuje proces određivanja brojeva, ali i dalje nam to nije dovoljno brzo. Zato ćemo uvesti još jednu teoremu koju ćemo, takođe, često koristiti u daljem radu.

Teorema 1.11. (Teorema pojednostavljivanja) Ako je za neki broj $x = \{x_L | x_D\}$ z najjednostavniji broj koji zadovoljava uslov $x_L < z < x_D$ za svako x_L i x_D, tada je $x = z$.

Dokaz. Da bi važila jednakost, treba da je zadovoljeno $x \geq z$ i $z \geq x$. Pretpostavimo suprotno, da ne važi $x \geq z$. U tom slučaju bi postojalo neko x_D za koje je $x_D \leq z$, što je nemoguće, ili bi postojalo neko z_L za koje je $x \leq z_L$. Međutim, kako je $x_L < x \leq z_L < z < x_D$, tj. $x_L < z_L < x_D$, dobijamo broj jednostavniji od z za koji važi tvrđenje, što je nemoguće. Dakle, $x \geq z$. Slično važi za $z \geq x$, te dobijamo $x = z$.

Koristeći ovu teoremu, dobijamo sledeće:

$$\{-1\,|\,\} = 0$$
$$\{-1, 0\,|\,\} = \{0\,|\,\} = 1$$
$$\{\ |\,1\} = 0$$
$$\{\,|\,0, 1\} = \{\,|\,0\} = -1$$
$$\{-1\,|\,1\} = 0.$$

Iz prethodne dve teoreme zaključujemo da su jedini novi brojevi konstruisani drugog dana:

$$\{\,|-1\},\ \{-1\,|\,0\},\ \{0\,|\,1\}\ \text{ i }\ \{1\,|\,\}.$$

Znamo da važi $0 < \{0\,|\,1\} < 1$ i $\{1\,|\,\} > 1$. Dakle, mi naslućujemo moguće vrednosti, pa ćemo, shodno tome, definisati $\{0\,|\,1\} = \frac{1}{2}$ i $\{1\,|\,\} = 2$. Sada, iz definicije negacije imamo $-\frac{1}{2} = \{-1\,|\,0\}$ i $-2 = \{-1\,|\,\}$.

Da bismo opravdali imena (vrednosti koje smo im dodelili), moramo proveriti da li su zadovoljena sva svojstva. Lako se proverava da je

$$-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2,$$

pa zaključujemo da je uređenost zadovoljena.

Koristeći definiciju sabiranja imamo $1 + 1 = \{0 + 1,\ 1 + 0\,|\} = \{1\,|\,\} = 2$, što smo i očekivali.

Sada treba da pokažemo da je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Iz definicije sabiranja imamo $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\{\frac{1}{2}\,|\,1+\frac{1}{2}\}$. Prvo ćemo pokazati da je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 1$. Da bi to važilo mora da važi $1+\frac{1}{2}\not\leq 1$ i $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\not\leq 0$. Kako je jedan element $(1+\frac{1}{2})_L = 1+0 = 1$ i kako je $1\geq 1$, zaključujemo da ne može biti $1+\frac{1}{2}\leq 1$. Slično tome, jedan element $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})_L = \frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}\geq 0$, pa ne može biti ni $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\leq 0$. Stoga je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 1$. Slično se pokazuje i $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\leq 1$, te je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Zbog opširnosti i tehničkog karaktera, dokaz naredne teoreme izostavljamo, a može se pronaći u (Conway 1976).

Teorema 1.12. Pretpostavimo da su različiti brojevi na kraju n-tog dana sledeći: $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_m$.

Tada važi sledeće:

(i) jedini novi brojevi konstruisani $(n+1)$-og dana su: $\{\,|\,x_1\}, \{x_1\,|\,x_2\}, \{x_2\,|\,x_3\}, \ldots, \{x_{m-1}\,|\,x_m\}, \{x_m\,|\,\}$,

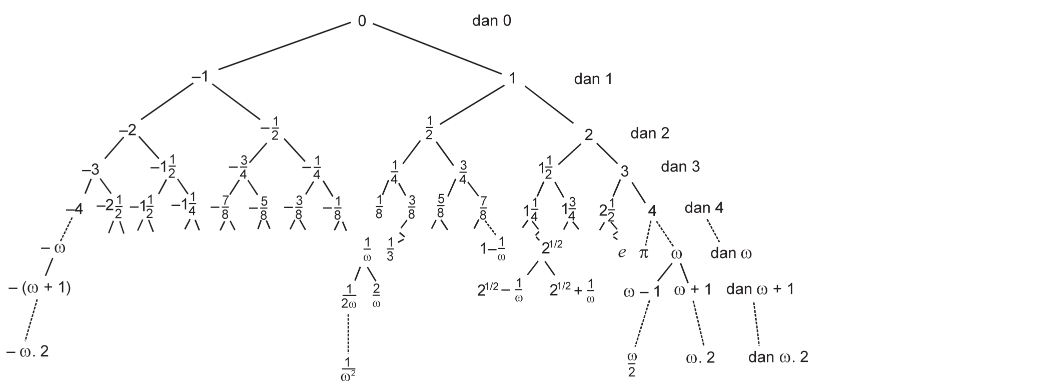
(ii) $\{\,|\,x_1\} < x_1 < \{x_1\,|\,x_2\} < x_2 < \{x_2\,|\,x_3\} < \ldots < \{x_{m-1}\,|\,x_m\} < x_m < \{x_m\,|\,\}$,

(iii) $\{x_m\,|\,\} = x_m + 1$,

(iv) $\{\,|\,x_1\} = x_1 - 1$,

(v) $\{x_i\,|\,x_{i+1}\} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, gde je $i = 1,3,\ldots, m-1$.

Ilustraciju nadrealnih brojeva dajemo narednom slikom:



1.4. Pseudo brojevi

Kao što smo napomenuli, pseudo brojevi ne zadovoljavaju Aksiomu 1.1, tj. ako je $x = \{x_L | x_D\}$ pseudo broj, tada ne važi $x_L \ngeq x_D$ za svako x_L i x_D. Na primer, $\{0|-1\}$ ne zadovoljava Aksiomu 1.1, jer je $0 > -1$, kao ni $\{0|0\}$, jer je $0 \geq 0$. Dakle, $\{0|-1\}$ i $\{0|0\}$ su pseudo brojevi. Međutim, za pseudo brojeve važe definicije koje smo naveli u prvom delu o nadrealnim brojevima. Lako se proverava da važi $\{0|0\} \leq 1$. Ipak, $\{1|0\}$ i 0 ne mogu da se porede, jer $\{1|0\} \nleq 0$ i $0 \nleq \{1|0\}$, pa zaključujemo da pseudo brojevi nisu potpuno uređeni. Iako se pseudo brojevi ne ponašaju isto kao nadrealni, neke teoreme i dalje važe. Na primer, važi $x \leq x$, $x + y = y + x$, $x + 0 \equiv x$, kao i tranzitivnost, jer se u dokazima ovih teorema ne koristi Aksioma 1.1.

2. „Posebni" brojevi i igre

Broj $I = \{a, b, c, \ldots | d, e, f, \ldots\}$ možemo posmatrati kao igru gde elementi levog skupa predstavljaju poteze koji Levi (plavi) igrač može da odigra, a elementi desnog skupa predstavljaju poteze koji Desni (crveni) igrač može da odigra. Na primer, iz igre I Levi igrač može da se pomeri u igru a (što predstavlja jedan njegov potez), dok Desni igrač može da se pomeri, recimo, u igru f. Ako je Levi igrač na potezu i pomeri se u igru a, tada igru ne predstavljamo više kao $I = \{a, b, c, \ldots | d, e, f, \ldots\}$, već kao

$$a = \{a_1, b_1, c_1, \ldots | d_1, e_1, f_1, \ldots\},$$

gde je Desni igrač na potezu. On odatle može da se pomeri, na primer, u d_1, i tako dalje.

Definicija 2.1. Neka je I igra. Tada važi sledeće:

1. $I > 0$ (I je pozitivno), ako Levi igrač ima pobedničku strategiju.
2. $I < 0$ (I je negativno), ako Desni igrač ima pobedničku strategiju.
3. $I = 0$ (I je nula), ako igrač koji je drugi na potezu ima pobedničku strategiju.
4. $I \| 0$ (I je fazi. U ovom slučaju I nije broj), ako igrač koji je prvi na potezu ima pobedničku strategiju.

Teorema 2.1. Neka je I igra. Ako $A, B \in I_L$ i pri tom važi $A \leq B$, tada se vrednost igre I ne menja ako sklonimo potez A.

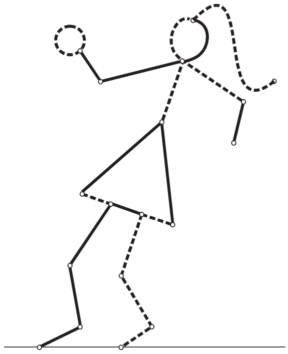
Na primer, ako je $I = \{A, B, C | D, E\}$ i $H = \{B, C | D, E\}$, tada je $I = H$.

Dokaz. Dokaz direktno sledi iz posledice Teoreme 1.10.

Da bismo videli primenu prethodne dve teoreme i nadrealnih brojeva, najpre dajemo primer igre Hakenbuš preuzet iz literature (Berlekamp *et al.* 2001).

Hakenbuš

Igra Hakenbuš se igra sa slikama, kao što je, na primer, slika 1. Dva igrača, Levi i Desni, igraju igru, tako što Levi briše bilo koji plavi štapić (na slici puna linija) zajedno sa svim štapićima koji ni na koji način nisu povezani sa podlogom (tanka linija na slici), dok Desni briše bilo koji crveni



Slika 1.
Igra Hakenbuš. Potezi Levog (plavog) igrača označeni su punim linijama, a Desnog (crvenog) – isprekidanim.
Prema: Berlekamp *et al*. 2001.

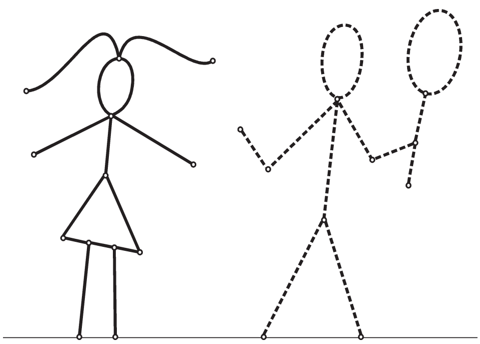
Figure 1.
The game Hackenbush. Two players consecutively erase one segment at a time: the Left player (who plays first) can erase only thick segments, while the Right player can erase only dotted segments. When one segments is erased, all segments which become disconnected with the ground are also erased. The player who cannot make a move loses. Who has the winning strategy?
According to: Berlekamp *et al*. 2001.

štapić na isti način. Igrač koji ostane bez ijednog svog štapića na slici gubi. Ko ima pobedničku strategiju?

Pre nego što dobijemo odgovor na pitanje, utvrdićemo pravila igre. Posmatrajmo sliku 1. Neka je Levi igrač na potezu. On može izbrisati jedan deo devojčicine noge tako što će ukloniti plavi štapić koji je povezan sa podlogom. Na taj način će on izbrisati samo taj jedan deo njene noge, dok ostatak devojčice ostaje jer je povezana sa podlogom. Međutim, crveni igrač može potpuno obrisati devojčicu uklonivši crveni deo noge koji je povezan sa podlogom.

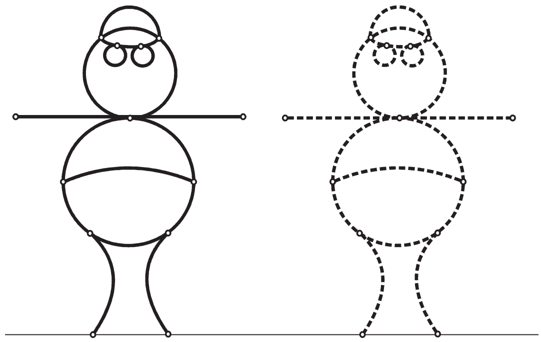
Pošto smo razumeli pravila, možemo da krenemo sa analiziranjem jednostavnijih primera.

Posmatrajmo sledeću sliku:



Zbog načina na koji su obojeni, devojčica „pripada" Levom igraču, a dečak Desnom. Levi i Desni igrač će uklanjati naizmenično štapiće sa svojih figura. Kako se devojčica sastoji od 14, a dečak od 11 štapića, jasno je da će Levi igrač pobediti i to sa bar $14-11=3$ poteza viška.

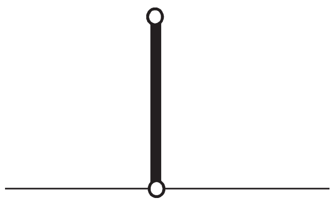
Na sledećoj slici, figura 1 i figura 2 imaju isti broj štapića, što znači da je Levi $19-19=0$ poteza u prednosti. Šta nam to govori? Ako Levi počinje i oba igrača igraju razumno, potezi će se smenjivati Levi, Desni, Levi, Desni, dok svaki od igrača ne odigra 19 poteza. Kako je Levi na potezu i nijedan štapić nije preostao, Levi igrač gubi. Dakle, ako Levi igrač započinje igru, Levi igrač gubi, što isto važi i ako Desni igrač započinje igru. U ovoj *nula poziciji*, pobeđuje igrač koji je drugi na potezu.



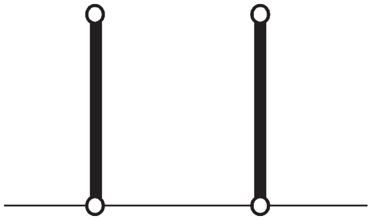
Kako da izračunamo ko pobeđuje?

U prethodnim primerima smo računali koliko poteza je Levi igrač u prednosti. Nešto slično ćemo i sada računati. Krenimo od najjednostavnijih primera. Za početak, posmatrajmo praznu podlogu, kao na slici:

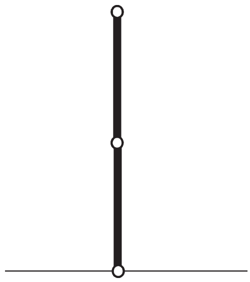
Sa I ćemo označiti igru. Lako se zaključuje da pobeđuje igrač koji je drugi na potezu, što znači da je $I = 0$. Kako Levi ne može da odigra potez, levi skup igre je prazan. Isto važi i za desni skup. Prema tome, $I = \{ \mid \}$:



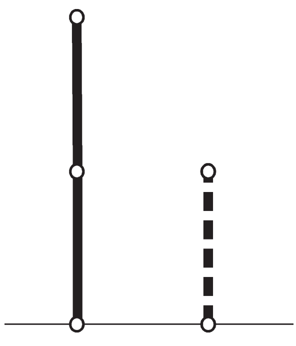
Ako postoji samo jedan plavi štapić, tada se Levi igrač može pomeriti u 0, dok Desni igrač ne može da odigra potez. U tom slučaju, $I = \{0 \mid \} = 1 > 0$. Dakle, Levi igrač pobeđuje i u prednosti je jedan potez. Slično, ako postoji samo jedan crveni štapić, tada je $I = \{ \mid 0\} = -1 < 0$, te pobeđuje Desni igrač i u prednosti je jedan potez:



Ako imamo dva plava štapića, jedan pored drugog, tada Levi igrač može da se pomeri u 1, dok Desni igrač nema potez. Sada je $I = \{1 \mid \} = 2$. Levi igrač pobeđuje sa dva poteza u prednosti. Međutim, da li smo morali da računamo I analiziranjem poteza oba igrača? Ne. Mogli smo da posmatramo ovu igru sa dva štapića kao dve igre sa po jednim štapićem. Znamo da je *vrednost* jednog štapića 1, što znači da je vrednost naše igre $1+1=2$:

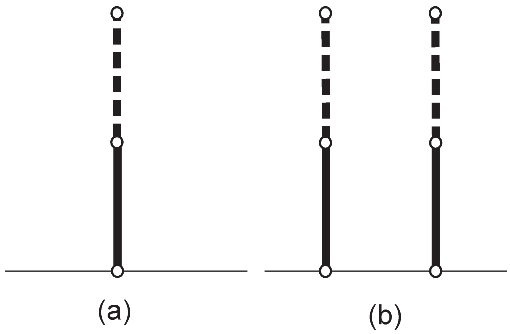


Da li se igra sa dva plava štapića, kao na slici iznad, razlikuje od prethodnog primera? Ako Levi igrač skloni štapić sa vrha, tada ostaje jedan štapić, te je vrednost tog poteza 1. Sa druge strane, ako Levi igrač skloni štapić koji je povezan sa podlogom, tada ne ostaje ništa i vrednost tog poteza je 0. Dakle, $I = \{0, 1 \mid \} = \{1 \mid \} = 2$. Kako je vrednost ove igre ista kao vrednost prethodne, zaključujemo da su one ekvivalentne. Koristeći svojstva nadrealnih brojeva, znali smo da je $\{0, 1 \mid \}$ isto što i $\{1 \mid \}$. Šta to znači? To znači da je potez čija je vrednost 1 povoljniji za Levog igrača nego potez čija je vrednost 0. Iako bi u ovom slučaju Levi pobedio bilo da se pomerio u 0 ili u 1, pametnije je da se pomeri u 1. U sledećem primeru ćemo videti i zašto:



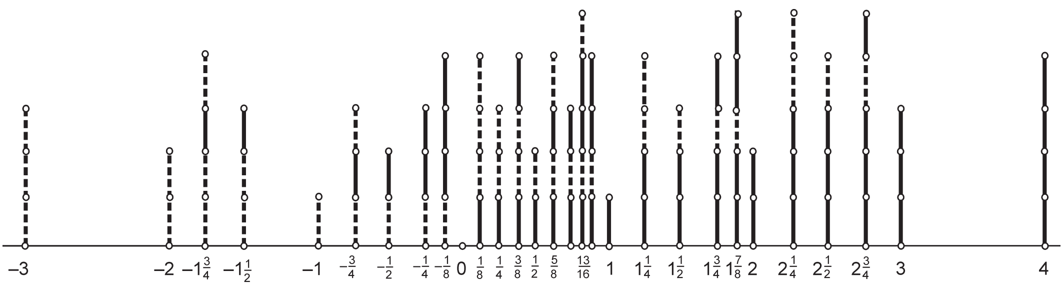
Kada bi Levi igrač sklonio plavi štapić sa podloge, tada bi se on pomerio u $0 + (-1) = -1 < 0$, te bi Desni igrač pobedio. Međutim, ako Levi igrač skloni plavi štapić sa vrha, tada je vrednost njegovog poteza $1 + (-1) = 0$, a kako je Desni igrač na potezu, Levi pobeđuje. Vrednost ove igre je $I = \{-1, 0 \mid 2\} = = \{0 \mid 2\} = 1$, ili jednostavnije, $I = 2 + (-1) = 1$. Dakle, neformalno rečeno, Levi igrač *više voli* veće brojeve, a Desni igrač manje brojeve. Tako da, kada bi Levi igrač birao između poteza čije su vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on bi izabrao potez čija je vrednost $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, dok bi Desni izabrao potez čija je vrednost $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Nama je intuitivno jasno šta znači biti jedan, dva, tri, itd. poteza u prednosti, odnosno zaostatku. Međutim, da li je moguće biti pola poteza u prednosti i šta to zapravo znači? Da bismo dobili odgovor na ovo pitanje, razmatraćemo sledeću igru:



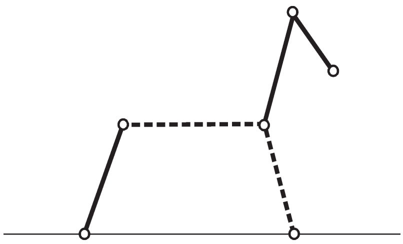
U primeru (a), $I = \{0, 1 \mid \} = \frac{1}{2} > 0$, što znači da Levi igrač pobeđuje i da je u prednosti za pola poteza. Da bismo bolje razumeli šta znači biti pola poteza u prednosti, posmatraćemo primer (b). U tom slučaju vrednost naše nove igre je $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, što je ekvivalentno igri sa samo jednim plavim štapićem. U to se možemo lako uveriti. Naime, ako je Levi igrač na potezu, on može skloniti jedan plavi štapić (nije bitno koji jer su obe figure identične). Automatski se briše crveni štapić jer nije u kontaktu sa podlogom. Desni igrač je na potezu i on ima samo jednu opciju, a to je da skloni crveni štapić. Levi igrač je na potezu i ostao je samo jedan plavi štapić. Slično je i ako Desni igrač započinje igru, tj. ostaće samo jedan plavi štapić i biće Desni igrač na potezu. Dakle, uverili smo se da je igra na slici (b) ekvivalentna igri sa jednim plavim štapićem. I zaista ima smisla biti pola poteza u prednosti.

Naravno, postoje i vrednosti $-\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{13}{16}, \ldots$ Evo nekoliko primera:

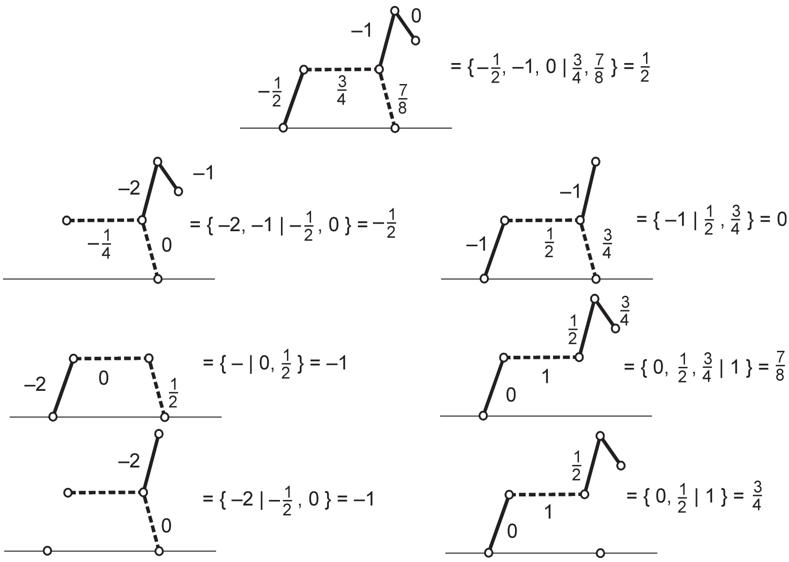


Primetimo da je svaka pozicija na slici broj. Zaista se ispostavlja da je svaka vrednost igre I broj jer, brisanjem plavog štapića se smanjuje vrednost igre, dok se brisanjem crvenog štapića povećava vrednost igre, te je $I_L < I < I_D$. Indukcijom su I_L i I_D brojevi, pa je i I broj.

Sada ćemo analizirati nešto komplikovaniju igru. Posmatrajmo sliku konja:



Koja je vrednost ove igre? Traženu vrednost računamo:



Sada znamo kako da izračunamo vrednost igre sa slike 1 (prva slika u ovom odeljku), međutim, kako to zahteva više vremena, računanje ćemo prepustiti čitaocu.

3. Nim-brojevi i igre

Za rešavanje igara u ovom odeljku nam neće biti dovoljni samo nadrealni brojevi. Zato ćemo se sada upoznati sa nim-brojevima.

3.1. Nim-brojevi

Poznato nam je da je $\{\ |\ \} = 0$ broj. Zapravo, to će biti naš jedini nim-broj koji je i nadrealan broj. Ponekad ćemo ga obeležavati i sa 0. Sada, posmatrajmo pseudo broj $\{0|0\}$. Kao što već znamo, $\{0|0\}$ nije nadrealan broj. Međutim, kako će se $\{0|0\}$ često pojavljivati u igrama kao pozicija, bilo bi zgodno da mu damo neki naziv. Stoga uvodimo sledeće:

$\{0|0\} = *1 = *$.

Zvezda (*) spada u grupu nim-brojeva.

Sada ćemo se upoznati i sa ostalim nim-brojevima.

$\{0,*|0,*\} = *2,$

$\{0,*,*2|0,*,*2\} = *3,$

$\vdots$

$\{0,*,\ldots,*(n-1)|0,*,\ldots,*(n-1)\} = *n.$

Napomena. Kako su levi i desni skup svakog nim-broja isti, u nastavku ćemo, radi preglednosti, pisati samo elemente jednog skupa. Na primer, $*3 = \{0,*,*2\}$.

Primetimo da ako je pozicija igre nim-broj koji nije 0, tada pobeđuje prvi igrač tako što se pomeri u 0. Međutim, šta se dešava ako treba da sabiramo pozicije? Ko pobeđuje u igri *2 + *3 + *5? Da bismo dobili odgovore na ova i još mnoga druga pitanja, moramo se upoznati sa osnovnim svojstvima nim-brojeva.

3.1.1. Osnovna svojstva

Kako nula pripada i levom i desnom skupu svakog nim-broja sem *0, Aksioma 1.1 ne važi. Međutim, za nim-brojeve važe definicije koje smo uveli za nadrealne brojeve, dok se to ne može reći i za sve teoreme. Primer tome je, svakako, uređenost. Nim-brojevi nisu potpuno uređeni. Na primer, * i 0 ne mogu da se porede, tj. * nije ni manja od 0, ni jednaka 0, niti je veća od 0.

Kao što smo spomenuli, naše definicije i dalje važe. Prema tome, podsetimo se definicije negacije: $-x = = \{-x_D|-x_L\}$. Ako to primenimo na nim-brojeve dobijamo:

$-x = \{0|0\} = *,$

$-*2 = \{0,*|0,*\} = *2,$

$\vdots$

Dakle, negacijom nekog nim-broja dobijamo isti taj nim-broj. Iako nam se ovo sada ne čini korisnim, u analiziranju složenijih igara, ovo svojstvo će nam značiti.

Da bismo uveli jednu važnu teoremu najpre ćemo razmatrati igru:

$$I = \{*0,*1,*2,*5,*6,*9\}.$$

Primetimo da je najmanji broj koji stoji uz zvezdu, a koji ne pripada levom (desnom) skupu, zapravo, broj 3. Šta više, I = *3, odnosno, vrednost igre I je *3. Da bismo to i dokazali, potrebno je da se uverimo u sledeće:

1. ako postoji pobednički potez u *3, onda on postoji i u I i
2. ako postoji pobednički potez u I, onda on postoji i u *3.

Dokazaćemo najpre (1). Znamo da je $*3 = \{*0,*1,*2\}$. Svi elementi levog (desnog) skupa nim-broja *3 su takođe i elementi levog (desnog) skupa igre I. Tako da, ako postoji pobednička strategija, tj. pobednički potez u *3, tada on postoji i u igri I. Da bismo dokazali (2), razmatraćemo dva slučaja. Prvi slučaj je da je pobednički potez pomeranje iz I u *0, *1, ili *2. Očigledno je da tada postoji pobednički potez u *3. U drugom slučaju ćemo pretpostaviti da pomeranje u *0, *1, ili *2 nisu pobednički potezi.

Sada ćemo pretpostaviti da (2) ne važi, odnosno, da postoji pobednička strategija u I, a da ne postoji u *3. Tada, ako je pobednički potez, na primer, pomeranje u *5 = {*0,*1,*2,*3,*4}, igrač koji je na potezu može da odabere da odigra iz *5 u *3. Kako je naša pretpostavka da ne postoji pobednička strategija u *3, a igrač koji ima pobedničku strategiju je na potezu, dolazimo do kontradikcije. Analogno i ako je pobednički potez pomeranje u *6, ili *9. Dakle, dokazali smo (2). Sada ćemo dati uopštenje.

Teorema 3.1. Ako je I = $\{*0,*1,\ldots,*(n-1),*m_1,*m_2,\ldots,*m_i\}$, gde je $m_k > n$ za 1 < k < i i $n, m_k \in N$, tada je $I = *n$.

Dokaz. Slično kao dokaz prethodnog primera.

Naredno tvrđenje je izuzetno bitno pri nalaženju pobedničkih strategija nekih igara. U literaturi se ono najcesčešće koristi bez dokaza, pa ćemo ga zato ovom prilikom dokazati.

Teorema 3.2. $*n + *m = *(n \oplus m)$.

Napomena. Znakom $\oplus$ se označava ksorovanje. Izraz $n \oplus m$ (čita se n ksor m) se izračunava tako što se n i m prebace u binarni zapis i saberu se binarno „bez prenošenja", tj. paran broj jedinica u koloni je 0, a neparan je 1. Dobijeni zbir se prebaci u dekadni sistem.

Dokaz. Za dokaz ove teoreme koristićemo indukciju po zbiru. Pretpostavićemo da teorema važi za sve brojeve koji su manji od $n + m$ i dokazaćemo da važi za m i n. Baza se trivijalno pokazuje. Za $x + y = 0$, sledi $x = y = 0$ i *0 + *0 = *0. Sada, koristeći definiciju sabiranja dobijamo $*n+*m =$

$$= \{*0+*m,*1+*m,\ldots,*(n-1)+*m,*0+*n,*1+*n,\ldots,*(m-1)+*n\},$$

odnosno, iz naše induktivne pretpostavke:

$$*n + *m =$$

$$= \{*(0\oplus m),*(1\oplus m),\ldots,*((n-1)\oplus m),*(0\oplus n),*(1\oplus n),\ldots,*((m-1)\oplus n)\}$$

Prema prethodnoj teoremi, potrebno je da dokažemo da među brojevima $0 \oplus m$, $1 \oplus m$, …, $(n-1) \oplus m$, $0 \oplus n$, $1 \oplus n$, …, $(m-1) \oplus n$

1. ne postoji broj $n \oplus m$,
2. da postoje brojevi 0, 1, …, $(n \oplus m) - 1$.

Da bismo dokazali (1), pretpostavićemo da postoji broj $0 \le x \le m-1$, takav da je $n \oplus x = n \oplus m$.

Ako dodamo n sa leve strane, dobijamo $n \oplus n \oplus x = n \oplus n \oplus m$, odnosno $0 \oplus x = 0 \oplus m$, te je $x = m$. Kontradikcija. Analogno za $0 \le x \le n-1$, čime smo dokazali (1). Za dokazivanje (2) ćemo razmatrati tri slučaja.

Slučaj 1: Broj n ima veći broj bitova od broja m (ne umanjujući opštost).

Brojeve n i m ćemo predstaviti u binarnom zapisu kao

$$n = 1a_k a_{k-1} \ldots a_1 \text{ i } m = a_l a_{l-1} \ldots a_1$$

gde je $l \le k$ i $a = 0$, ili $a = 1$. Tada je $n \oplus m = 1a'_k a'_{k-1} \ldots a'_1$, ili u dekadnom zapisu $n \oplus m = 2^k + 2^{i-1} + \cdots$ (ako je $a'_i = 1$ i tako dalje). Neka je A skup elemenata od 0 do $(n \oplus m) - 1$, tj. $A = \{0,1,\ldots,(n \oplus m) - 1\}$. Znamo da je $|A| = n \oplus m$. Sada ćemo tačno jednu jedinicu broja $n \oplus m = 1a'_k a'_{k-1} \ldots a'_1$ prebaciti u nulu, a svaki bit posle te jedinice ćemo ili promeniti, ili ne. Ovaj proces ćemo ponoviti za svaku jedinicu prvobitnog broja $n \oplus m$. Time ćemo dobiti različite brojeve koji pripadaju skupu A. Prebacivanjem prve jedinice u nulu dobijamo brojeve oblika $0b_k b_{k-1} \ldots b_1$, gde je $b = 0$, ili $b = 1$. Ovakvih brojeva ima 2^k, jer za svako b postoje dve mogućnosti. Ako je sledeća jedinica na i-tom mestu, tada ćemo je prebaciti u nulu i dobiti brojeve oblika $1a'_k a'_{k-1} \ldots a'_{i+1} 0b_{i-1} b_{i-2} \ldots b_1$. Ovakvih brojeva ima 2^{i-1}. Ponavljanjem ovog procesa dobijamo $2^k + 2^{i-1} + \cdots = m \otimes n$ različitih brojeva koji pripadaju skupu A. Kako je kardinalnost skupa A takođe jednaka $n \oplus m$, zaključujemo da navedenim procesom dobijamo sve brojeve skupa A. Da bismo promenili $m \oplus n$ na navedeni način, dovoljno je da promenimo ili n, ili m. To ćemo uraditi tako što ćemo posmatrati bit broja n i bit broja m koji se nalazi na istoj poziciji kao i jedinica broja $n \oplus m$ koju menjamo. Ako je posmatrani bit broja n jednak 1 (posmatrani bit broja m jednak 0), tada ćemo ga prebaciti u nulu, a ostale bitove broja n, koji se nalaze na manjim pozicijama od navedenog bita, menjaćemo po potrebi. Na taj način ćemo dobiti broj koji je manji od n. Broj m nećemo menjati. Dakle, broj koji smo dobili menjanjem broja $m \oplus n$ je neki od brojeva $0 \oplus m$, $1 \oplus m$, ..., $(n-1) \oplus m$. Slično i ako je posmatrani bit broja m jednak 1. Ovime smo dokazali slučaj 1.

Slučaj 2: n i m su različiti i imaju isti broj bitova.

Neka je $n = 1a_k a_{k-1} \ldots a_1$ i $m = 1b_k b_{k-1} \ldots b_1$. Kako su n i m različiti, važi sledeće:

$$(\exists i)(\forall l)(i < l \leq k \Rightarrow (a_l = b_l) \wedge (a_i \neq b_i)).$$

Na osnovu prethodnog dobijamo $n \oplus m = 1c_{i-i} c_{i-2} \ldots c_1$, gde je $c = 0$, ili $c = 1$. U dekadnom sistemu je $n \oplus m = 2^{i-1} + 2^{j-1} + \ldots$ (ako je $a_j = 1$ i tako dalje). Ostatak dokaza je isti kao i u prethodnom slučaju.

Slučaj 3: $m = n$.

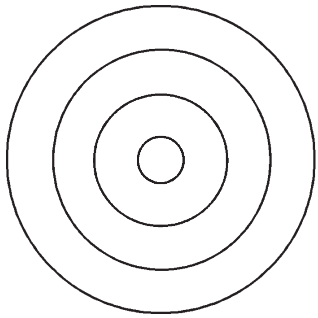
Treba da dokažemo da je $*n + *m = *(n \oplus m) = 0$, odnosno da u igri $*n + *$m pobeđuje drugi igrač. Kako su n i m jednaki, drugi igrač, da bi pobedio, treba samo da kopira poteze prvog igrača. Kraj dokaza.

Dakle, u igri *2 + *3 + *5 pobeđuje prvi igrač jer je *2 + *3 + *5 = *6. Pobednički potez je *2 + *3 + *5 = *6 $\rightarrow$ *2 + *3 + * = 0. Važno je napomenuti da pobednički potez nije obavezno jedinstven. Naime, znamo da iz pozicije $*n$ možemo sigurno da se pomerimo u neku od pozicija 0, *,..., $*(n - 1)$ međutim, može da se desi da možemo da se pomerimo i u poziciju $*m$, gde je $m > n$ (pogledati Teoremu 3.1). Tako, na primer, ako je $*2 = \{0,*,*6 | 0,*,*6\}$, onda je i *2+*3+*5 = *6 $\rightarrow$ *6+*3+*5 = 0 pobednički potez.

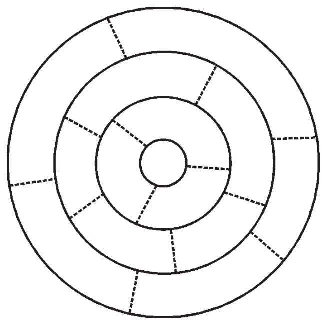
U ovom odeljku smo videli kako se nim-brojevi sabiraju. Do kraja rada opisujemo igru sa metama koja je, koliko je autoru poznato, originalna.

Mete

Metu čine centar i tri kružna prstena:



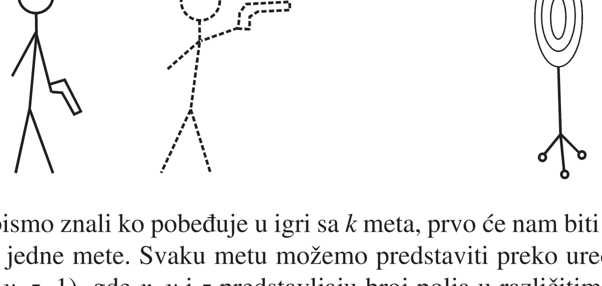
Svaki kružni prsten može dužima biti podeljen na proizvoljan broj delova (polja), kao na slici:



(5, 5, 3, 1)

Centar mete ne može biti podeljen i on predstavlja jedno polje.

Dva igrača igraju igru koja se sastoji iz k meta. Svaki igrač u svom potezu mora da izabere jednu od k meta i da gađa ili jedno polje, ili dva polja koja ne pripadaju istom kružnom prstenu. Svako polje može biti pogođeno samo jedanput. Igrač koji pogodi poslednje slobodno polje pobeđuje. Ko ima pobedničku strategiju?



Da bismo znali ko pobeđuje u igri sa k meta, prvo će nam biti potrebne vrednosti jedne mete. Svaku metu možemo predstaviti preko uređene četvorke $(x, y, z, 1)$, gde x, y i z predstavljaju broj polja u različitim kružnim prstenovima, a jedinica predstavlja centar.

Da bismo znali vrednosti svih mogućih poteza, biće nam potrebne i vrednosti uređene četvorke $(x, y, z, 0)$ (u slučaju da je pogođen centar). Vrednosti možemo pročitati iz sledećih tabela:

$(x, y, z, 0)$	$x \geq y \geq z \geq 0$
vrednosti	uslovi
0	AAA
*	BAA
*2	AAB
*3	ABA

$(x, y, z, 1)$	$x \geq y \geq z \geq 1$
vrednosti	uslovi
*	$x = y$, AAA
*2	$y = z$, BAA
*3	$x = y$, AAB
*3	$x \neq y$, $y = z$, AAA
*4	ABA
*5	$x \neq y$, AAB
*6	$y \neq z$, BAA
*7	$x \neq y$, $y \neq z$, AAA

Slova A i B u tabelama označavaju parnosti. Ista slova označavaju iste parnosti, različita slova različite parnosti. Tako, na primer, AAA se odnosi na $2|x$, $2|y$ i $2|z$, ili $2 \nmid x$; $2 \nmid y$ i $2 \nmid z$, dok, ABA na $2|x$, $2 \nmid y$ i $2|z$, ili $2 \nmid x$; $2|y$ i $2 \nmid z$.

Da bismo se uverili da su vrednosti u gore navedenim tabelama istinite, treba da pokažemo:

- iz pozicije 0 ne možemo da se ponovo pomerimo u poziciju 0,
- iz pozicije * možemo da se pomerimo u poziciju 0, ali ne i u poziciju *,
- iz pozicije *2 možemo da se pomerimo u pozicije 0 i *, ali ne i u poziciju *2,

  $\vdots$

Navedena tvrđenja se dokazuju trivijalno, te to prepuštamo čitaocu.

Prisetimo se naše mete (5, 5, 3, 1) sa slike. Znamo da je vrednost te mete *, što znači da pobeđuje prvi igrač. Takođe znamo da je pobednički potez (5, 5, 3, 0), odnosno, pogodak u centar. Primetimo da za $k = 1$ uvek pobeđuje prvi igrač (igra je fazi) tako što će u prvom potezu gađati centar i eventualno još jedno polje. Za $k > 1$ je potrebno sabrati vrednosti svih meta pravilom sabiranja. Kako su sve vrednosti nim-brojevi, sabiramo ih ksorovanjem.

Literatura

Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K. 2001. *Winning Ways for your Mathematical Plays*. Wellesley Massacusetts: Wellesley

Conway J. H. 1976. *On Numbers and Games*. Academic Press

Jelena Mrdak

Application of “Unreal” Numbers in Games

In this paper we present a special kind of numbers, namely, surreal numbers, pseudo numbers and nim-numbers. The set of surreal numbers is a certain superset of real numbers, inductively defined, which contains elements larger than any real number, and similarly, smaller than any positive real number. Pseudo numbers and nim-numbers are also inductively defined, although different from surreal numbers, they share some properties. The main goal of the paper is to demonstrate how these “unreal” numbers can be used in an analysis of winning strategies in mathematical games. We show this on two examples: one of them is well-known, it is the game called Hackenbush; the other one is an original game we called The targets.