Kristina Silađi i Daniel Silađi

Potapanje grafova u knjige

Potapanje grafa u knjigu spada u geometrijsku i topološku teoriju grafova, i ima velike primene u VLSI (Very Large Scale Integration) dizajnu, koji se bavi problemom konstrukcije integrisanih kola sa velikim brojem tranzistora. Knjigu sa k *strana čini jedna prava na kojoj se nalaze čvorovi grafa i* k *njome ograničenih poluravni, na kojima su raspoređene grane grafa. Ako je moguće rasporediti te grane tako da se nikoje dve ne seku, kažemo da smo graf potopili u knjigu. Takođe je interesantan i problem određivanja minimalnog broja preseka grana pri ucrtavanju grafa u knjigu sa fiksiranim brojem strana. U ovom radu dajemo pregled i kompletne, dopunjene dokaze nekih novijih rezultata iz ove oblasti, kao i neke i originalne rezultate vezane za potapanje nekih specijalnih klasa grafova u knjigu. Na kraju rada, opisan je algoritam za kompjutersko određivanje optimalnog crtanja proizvoljnog grafa u knjigu.*

1 Uvod

Tema ovog rada spada u geometrijsku i topološku teoriju grafova. Ako je $G = (V, E)$ neki prost graf, *crtež* D grafa G u ravni je predstavljanje čvorova pomoću tačaka, a grana pomoću Žordanovih krivih koje povezuju susedne čvorove (i ne prolaze kroz druge čvorove). Primetimo da jedan graf ima beskonačno mnogo crteža. U daljem tekstu, termine čvor i grana grafa ćemo koristiti i za imena geometrijskih objekata koji ih predstavljaju na datom crtežu. U tom smislu kažemo da se dve grane na nekom crtežu D *seku* ako imaju zajedničku unutrašnju tačku. Kažemo da je crtež nekog grafa dobar ako se nikoje tri grane ne seku u jednoj tački, dve susedne grane se ne seku, i nikoje dve grane se ne dodiruju. U daljem tekstu ćemo izučavati samo dobre crteže.

Jedna od intenzivno izučavanih tema je određivanje presečnog broja grafa. *Presečni broj crteža* D grafa G, u oznaci $\mathrm{cr}(D)$, je broj presečnih tačaka grana u tom crtežu. *Presečni broj grafa* G, u oznaci $\mathrm{cr}(G)$, je minimalan broj $\mathrm{cr}(D)$ po svim crtežima D grafa G. Naravno, graf G je planaran ako i samo ako je $\mathrm{cr}(G) = 0$. Interesantno je da se ne zna presečni broj čak ni za neke jednostavne grafove. U svom radu Garey i Johnson (1983) su dokazali da je problem određivanja presečnog broja grafa NP-kompletan problem.

Kristina Silađi (1997), Novi Sad, Fruškogorska 15, učenica 2. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

Daniel Silađi (1995), Novi Sad, Fruškogorska 15, učenik 3. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

Jedna od glavnih motivacija za izučavanje presečnog broja grafa je primena u VLSI dizajnu (Very-large-scale integration), koji se bavi problemom konstrukcije integrisanih kola sa velikim brojem tranzistora. Imajući u vidu tu motivaciju, u radu Fan Chung i saradnika (Chung *et al*. 1987) analiziran je problem „potapanja grafova u knjige". *Knjigu sa k listova* čine jedna prava l, i k njome ograničenih poluravni. *Crtanje grafa u knjigu* je predstavljanje njegovih čvorova tačkama na pravoj l, tako da se svaka grana nalazi u tačno jednoj stranici (poluravni). Ako se nikoje dve grane ne seku, kažemo da smo graf *potopili* u knjigu. *Pagenumber* $p(G)$ ili debljina knjige za G je najmanji broj k tako da se graf G može potopiti u knjigu sa k listova (očigledno, svaki graf se može potopiti u dovoljno debelu knjigu). Na primer, u radu Mihalisa Janakakisa (Yannakakis 1986) dokazano je da se svaki planaran graf može potopiti u knjigu sa najviše 4 strane. U radu Chung i saradnika (1987) je dokazano da je problem određivanja debljine knjige proizvoljnog grafa NP-kompletan. Minimalan broj preseka grana kada graf G crtamo u knjigu sa k strana zove se k-tostrani presečni broj, i obeležava se sa $\nu_k(G)$. U literaturi su uglavnom izučavani k-tostrani presečni brojevi za kompletne i kompletne bipartitne grafove. Trenutno, pomoću kompjutera moguće je odrediti k-tostrane presečne brojeve za grafove sa najviše 16 čvorova.

Struktura ovog rada je sledeća. U sekciji 2 dajemo pregled najvažnijih rezultata u vezi sa crtanjem grafova u knjigu. Sekcija 3 sadrži kompletan dokaz o najboljoj donjoj granici za ν_k (G), za proizvoljan graf G. U sekciji 4 se nalazi detaljan dokaz rezultata da je debljina knjige za kompletan graf K_n jednaka $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Ova sekcija sadrži i originalne rezultate autorâ u vezi potapanja nekih specijalnih klasa grafova u knjige. Algoritam za određivanje tačnog broja $\nu_k(G)$ i $p(G)$, iz rada Buchheim i Zheng (2006), opisan je u sekciji 5.

2 Pregled dosadašnjih rezultata

Prvo razmotrimo problem crtanja kompletnih grafova u knjigu sa k strana. Jasno je, za svaki graf G sa n čvorova, $\nu_k(G) \leq \nu_k(K_n)$, gde sa K_n označavamo kompletan graf sa n čvorova. Dakle, $\nu_k(K_n)$ daje jednu gornju granicu za ν_k (G).

Nije teško uvideti da je $\nu_k(K_n) = \binom{n}{4}$. Naime, svaka četvorka čvorova određuje tačno jednu presečnu tačku (posmatrajmo četvorku A, B, C, D, tako da je raspored tačaka $A - B - C - D$: grane AC i BD određuju jednu presečnu tačku). Dakle, presečnih tačaka ima koliko i četvorki čvorova, pa je $\nu_k(K_n) = \binom{n}{4}$.

Crtanje grafa na dve strane je specijalan slučaj crtanja grafa u ravni, kada su svi čvorovi kolinearni. Dakle, $\mathrm{cr}(G) \leq \nu_2(G)$, tj. presečni broj grafa nije veći od dvostranog presečnog broja tog grafa. Anthony Hill je 1958. godine opisao kako nacrtati K_n u ravni sa

$$Z(n) := \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

presečnih tačaka i pretpostavio da je $\mathrm{cr}(K_n) = Z(n)$. Ta hipoteza je poznata i kao Guy-ova hipoteza, jer je prvi put objavljena u radu Guy (1960). Kasnije, nekoliko različitih crteža K_n u knjigu sa dve strane je pronađeno, u kojima je broj preseka bio upravo $Z(n)$. Zbog toga je postavljena slabija hipoteza, da je $\nu_2(K_n) = Z(n)$. Ta hipoteza je prvo kompjuterski dokazana za male n-ove, da bi tek 2013. godine u radu Ábrego *et al.* (2013) bilo dokazano da je zaista $\nu_2(K_n) = Z(n)$. Napomenimo da je hipoteza $\mathrm{cr}(K_n) = Z(n)$ još uvek otvorena.

Šta se zna za crtanje kompletnog grafa u knjigu sa više od dve strane? Trenutno, najbolja poznata gornja granica za $\nu_k(K_n)$ je data 2013. godine u radu Etjena de Klerka i saradnika (de Klerk *et al.* 2013). U tom radu je dat algoritam za ucrtavanje K_n u knjigu sa k strana. Broj preseka koji se dobija pomoću ove konstrukcije je

$$Z_k(n) = (n \mod k)\cdot F\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1, n\right) + (k - (n \mod k))\cdot F\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, n\right)$$

gde je

$$F(r,n) = -\frac{r^4}{24} + \frac{nr^3}{12} - \frac{nr^2}{4} + \frac{7r^2}{24} + \frac{nr}{6} - \frac{r}{4}.$$

Do danas nije poznato ni jedno ucrtavanje K_n na k strana sa manje preseka. Takođe, svi kompjuterski dobijeni rezultati idu u prilog hipotezi $\nu_k(K_n) = Z_k(n)$.

Za grafove koji nisu kompletni, ima malo rezultata. Na primer, za kompletne bipartitne grafove $K_{m,n}$ u radu Adriana Riskina (Riskin 2003) dokazano je da ako $m|n$, onda $\nu_1(K_{m,n}) = \frac{1}{12}n(m-1)(2mn-3m-n)$. Za knjige sa 2 strane pomoću računara, u radu de Klerka i saradnika, objavljenom 2012. godine, dobijene su tačne vrednosti za $\nu_2(K_{m,n})$, za male m i n. U tom radu je postavljena hipoteza da je

$$\nu_2(K_{m,n}) = Z(m,n) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

koja još uvek nije dokazana. U istom radu su dati parcijalni rezultati za crtanje kompletnih bipartitnih grafova u knjige sa više od dve strane.

3 Donja granica za $\nu_k(G)$

Malo šta je poznato o donjim granicama za $\nu_k(G)$. Jedan od retkih rezultata se nalazi u radu Farhada Šahrokija i saradnika (Shahrokhi *et al.* 1996), čiji kompletiran i proširen dokaz dajemo ovde.

Teorema 1. Za svaki graf $G = (V, E)$, sa n čvorova i m grana, gde je $m \geq 3n$, važi:

$$\nu_1(G) \geq \frac{m^3}{27n^2}$$

Dokaz. Neka je D crtanje grafa G sa $\nu_1(G)$ preseka, $G' = (V', E')$ neki indukovani podgraf grafa G sa $|V'| = r$ čvorova, i D' odgovarajuće pod-crtanje na jednoj strani sa $\nu_1(D')$ preseka. Kasnije ćemo u teoremi 3 dokazati da je:

$$\nu_1(G) \geq |E'| - 2r + 3$$

Ako saberemo ove nejednakosti za sve indukovane podgrafove sa r čvorova, dobijamo

$$\sum_{\substack{G'=(V',E') \\ |V'|=r}} \nu_1(D') \geq \sum_{\substack{G'=(V',E') \\ |V'|=r}} |E'| - \sum_{\substack{G'=(V',E') \\ |V'|=r}} (2r-3)$$

Pošto postoji $\binom{n}{r}$ takvih podgrafova, a svaka grana je određena sa 2 čvora, svaka grana se pojavljuje u tačno $\binom{n-2}{r-2}$ podgrafova, odnosno

$$\sum_{\substack{G'=(V',E') \\ |V'|=r}} |E'| = m\binom{n-2}{r-2}.$$

To znači da

$$\sum_{\substack{G'=(V',E') \\ |V'|=r}} \nu_1(D') \geq m\binom{n-2}{r-2} - (2r-3)\binom{n}{r}$$

Sa druge strane, svaki presek je određen sa 4 čvora, što znači da se nalazi u $\binom{n-4}{r-4}$ podgrafova

$$\sum_{\substack{G'=(V',E') \\ |V'|=r}} \nu_1(D') = \binom{n-4}{r-4} \nu_1(G)$$

Uvrštavanjem dobijamo:

$$\binom{n-4}{r-4}\nu_1(G) \geq \binom{n-2}{r-2} - (2r-3\binom{n}{r})$$

Posle sređivanja dobijamo:

$$\nu_1(G) \geq \frac{(n-2)(n-3)}{(r-2)(r-3)}\left(m - (2r-3)\frac{n(n-1)}{r(r-1)}\right)$$

Lako se može uveriti da je $\frac{(n-2)(n-3)}{(r-2)(r-3)} \geq \frac{n^2}{r^2}$, kao i da je

$\frac{n(n-1)}{r(r-1)} \leq \frac{n^2}{r(r-1)}$

Onda nejednakost dobija oblik

$$\nu_1(G) \geq \frac{n^2}{r^2}\left(m-(2(r-1)-1)\frac{n^2}{r(r-1)}\right) \geq \frac{n^2}{r^2}\left(m-\frac{2n^2}{r}\right)$$

Ako uzmemo da je $r = \left\lceil \frac{3n^2}{m} \right\rceil$

$$\nu_1(G) \geq \frac{n^2}{\left(\left\lceil \frac{3n^2}{m} \right\rceil\right)^2}\left(m-\frac{2n^2}{\left\lceil \frac{3n^2}{m} \right\rceil}\right) > \frac{n^2}{\left(\frac{3n^2}{m}+1\right)}\left(m-\frac{2n^2}{\frac{3n^2}{m}}\right) = \frac{m^3}{3\left(3n+\frac{m}{n}\right)}$$

Pošto je $m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} < \frac{n^2}{2}$, dobijamo da je $\frac{m}{n} < \frac{n}{2}$, pa imamo

$$\nu_1(G) > \frac{m^3}{3\left(3n+\frac{m}{n}\right)^2} > \frac{m^3}{3\left(3n+\frac{n}{2}\right)^2} = \frac{4}{147}\frac{m^3}{n^2} > \frac{m^3}{37n^2}. \text{ QED.}$$

Teorema 2. Za svaki graf $G = (V, E)$ imamo

$$\nu_k(G) \geq \frac{m^3}{37k^2n^2} - \frac{27kn}{37}.$$

Dokaz. Prvo, primetimo da, ako je $m < 3kn$, desna strana postaje negativna, pa tvrđenje trivijalno važi. Dakle, možemo da pretpostavimo da je $m \geq 3kn$. Neka je G nacrtan na k strana, tako da je na i-toj strani nacrtan $G_i(V, E_i)$.

Sada definišemo funkciju f, na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ ako } x \leq 3n \\ \frac{x^3}{37n^2} - \frac{27n}{37}, \text{ ako } x \geq 3n \end{cases}$$

Očigledno (jer $\nu_1(G_i)$ predstavlja minimalan broj preseka na jednoj strani, a taj „lokalni” minimum se ne mora dostići na svakoj strani pri crtanju G na k strana), važi da je

$$\nu_k(G) \geq \sum_{i=1}^{k} \nu_1(G_i)$$

Takođe važi da je $\nu_1(G_i) \geq f(|E_i|)$, jer je za $|E_i| \leq 3n$ $f(|E_i|) = 0$, a u suprotnom, to važi po teoremi 1. Koristeći tu nejednakost, dobijamo:

$$\nu_k(G) \geq \sum_{i=1}^{k} \nu_1(G_i) \geq \sum_{i=1}^{k} f(|E_i|)$$

pošto je f konveksna funkcija, važi Jensenova nejednakost:

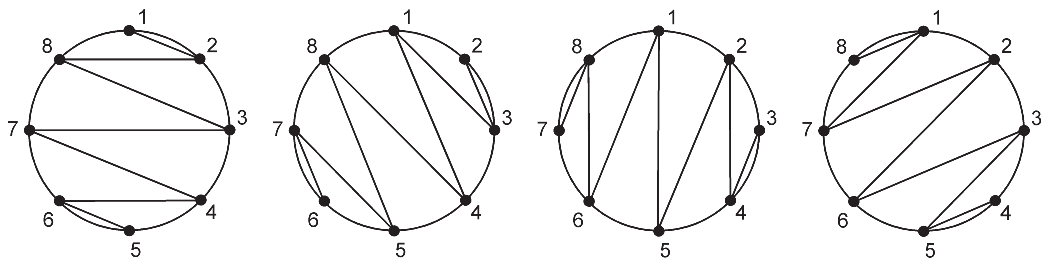
$$\sum_{i=1}^{k} f(|E_i|) \geq kf\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} |E_i|}{k}\right) = kf\,\frac{m}{k}\text{. QED.}$$

Napomenimo da je u radu De Klerka i saradnika (De Klerk *et al*. 2013) dokazano da se ova granica može poboljšati za kompletne grafove ukoliko je n dosta veće od k.

4 Debljina knjige za neke klase grafova

Neka je dat graf G, koga želimo da ucrtamo u knjigu sa k strana. Umesto crtanja čvorova na pravu i grana na poluravni, možemo koristiti ekvivalentnu prezentaciju, tzv. *cirkularni model*. U tom modelu, umesto k poluravni imamo k kružnica, na svaku od njih nacrtamo sve čvorove (u istom rasporedu), a zatim svaku granu crtamo u tačno jednu kružnicu, kao tetivu. Lako je uvideti da su ova dva modela ekvivalentna: naime, u oba modela dve grane AB i CD seku ako i samo ako su čvorovi u rasporedu A – C – B – D ili C – A – D – B.

Primer. Nacrtajmo kompletan graf K_8 na četiri strane pomoću cirkularnog modela (slika 1). Kasnije ćemo dokazati da se K_8 ne može potopiti u knjigu sa 3 strane, tj. da je $p(K_8) = 4$. Naime, dokazaćemo da je $p(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, gde je $\lceil x \rceil$ oznaka za najmanji prirodan broj veći ili jednak x.



Slika 1

4.1 Debljina knjige za kompletne grafove

U literaturi se bez dokaza navodi da je $p(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. U ovom delu daćemo detaljan dokaz te jednakosti. Prvo ćemo dokazati jednu lemu:

Lema. Ako nacrtamo e dijagonala n-tougla, tako da se te dijagonale međusobno seku u v tačaka (nikoje tri dijagonale se ne seku u jednoj tački), onda će te dijagonale deliti n-tougao na $e + v + 1$ oblasti.

Dokaz. Indukcijom po e:

Za $e = 1$: v mora biti 0, a dobićemo $1 + 1 + 0 = 2$ oblasti.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $e = m$.

Neka je dato m dijagonala koje se seku u v tačaka. Po indukcijskoj hipotezi, broj oblasti na koje dele n-tougao je $m + v + 1$. Dodaćemo još jednu dijagonalu, koja seče k prethodno nacrtanih dijagonala. To znači da ona prolazi kroz $k + 1$ oblast. Svaku oblast kroz koju prolazi deli na dva dela. Pošto dodata dijagonala ne utiče na oblasti koje ne seče, broj oblasti će se povećati za $k + 1$. Dakle, sada imamo $m+v+1+k+1=(m+1)+(v+k)+1$ oblasti, što je i trebalo dokazati.

Teorema 3. Neka je $G = (V, E)$ graf sa n čvorova i m grana. Tada je

$$\nu_1(G) \geq m-2n+3$$

Dokaz. Posmatrajmo *circular drawing* grafa sa n čvorova i $|E|$ grana. Broj preseka će biti najmanji ako n grana nacrtamo kao stranice n-tougla, a preostalih $|E| - n$ kao dijagonale. Pomoću leme dobijamo da grane dele n-tougao na $|E| - n + \nu_1(G) + 1$ oblasti. Jasno je da su sve te oblasti mnogouglovi. Neka je S zbir svih uglova u tim mnogouglovima.

$$S = (n-2)\cdot 108^\circ + \nu_1(G)\cdot 360^\circ,$$

jer je teme svakog ugla ili presek dve dijagonale ili teme n-tougla. Zbir svih uglova čije je teme presek dve dijagonale je ν_1 (G) $\cdot$ 360°, a zbir preostalih uglova je zbir uglova n-tougla). Pošto je zbir uglova u svakoj oblasti veći ili jednak 180°, imamo da je

$$S \geq (|E| - n + \nu_1(G) + 1)\cdot 180^\circ$$
$$360^\circ\cdot\nu_1(G) + 180^\circ\cdot(n-2) \geq (|E| - n + \nu_1(G) + 1)\cdot 180^\circ$$
$$\nu_1(G) \geq |E| - 2n + 3.\ \text{QED.}$$

Teorema 4. Debljina knjige za kompletan graf K_n je: $p(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da K_n ne može da se nacrta na manje strana bez preseka. Pretpostavimo suprotno, da se K_n može nacrtati na $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$ stranu bez preseka. Posmatrajmo sve grane osim (1,2), (2,3),...,($n-1$, n), (n,1). Tih grana ima $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n}{2}(n-3)$. Prema Dirihleovom principu, na jednoj strani će biti bar n – 2 posmatrane grane. Na tu stranu možemo docrtati i grane (1,2), (2,3),...,($n-1$,n), (n,1), jer se one ne seku ni međusobno niti seku prethodno nacrtane grane. Dakle, broj presečnih tačaka na toj strani je i dalje 0. Iz Teoreme 3 dobijamo da je $0 \geq (n-2+n)-2n+3=1$, što je kontradikcija. Dakle, $p(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Dokažimo da je $\nu_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}(K_n) = 0$.

Neka je n paran, posmatrajmo cirkularno crtanje za K_n. Na k-tu stranu crtamo izlomljenu liniju $k(k+1)(k-1)(k+2)(k-2)\ldots(k-\frac{n}{2}+1)(k+\frac{n}{2})$ (sabiranje se vrši po modulu n). Jasno je da se nikoje dve grane ne seku. Dokažimo da se svaka grana pojavljuje tačno jednom: Zbog simetrije je dovoljno posmatrati samo grane $1m$, $m = 2, 3,..., n$. Za parno m, grana $1m$ se nalazi na strani $\frac{m}{2}$ (čvorovi $\frac{m}{2}-\left(\frac{m}{2}-1\right)=1$ i $\frac{m}{2}+\frac{m}{2}=m$ su povezani). Za neparno m, grana $1m$ se nalazi na strani $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ (čvorovi $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil-\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil-1\right)$ i $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil-1=m$ su povezani). Pošto se svaka grana pojavljuje bar jednom, a nacrtali smo $\frac{n}{2}(n-1)$ grana, svaka grana se pojavljuje tačno jednom. Dakle, $p(K_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ za parno n.

Ako je n neparno: Nacrtajmo K_{n+1} na prethodno opisan način na $\frac{n+1}{2}$ strana, a zatim obrišemo jedan čvor. Tako dobijamo K_n. QED.

4.2 Debljina knjige za planarne grafove

U radu Yannakakis (1989) je dokazana sledeća teorema:

Teorema 5. Debljina knjige za proizvoljan planarni graf je najviše 4.

Daćemo primere planarnih grafova čija debljina knjige je 1 i 2.

Primer. Debljina knjige za stabla je 1.

Dokaz. Nacrtajmo čvorove po DFS preorder redosledu (crtamo prvo koren, pa zatim rekurzivno sva njegova podstabla). Dokazaćemo indukcijom po broju nivoa da se nikoje dve grane ne seku:

Ako imamo 1 nivo, nemamo nijednu granu.

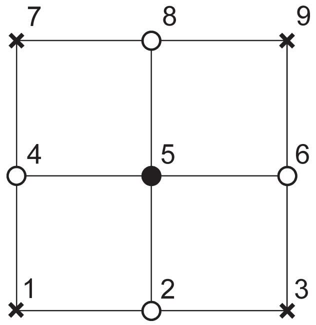
Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko n.

Nacrtajmo stablo sa $n + 1$ nivoa. Treba dokazati da se grane $n + 1$-vog nivoa ne seku sa drugima. Neka je (a,b) proizvoljna grana na $n + 1$-vom nivou, pri čemu je a levo od b. Da bi ova grana sekla granu (c,d) (c je levo od d), raspored čvorova mora biti a, c, b, d i $a \neq c$ i $b \neq d$. Pošto su jedini čvorovi između a i b sinovi od a, c mora biti sin od a. Čvor c je na poslednjem nivou, pa ne postoji grana (c,d), što je kontradikcija sa pretpostavkom da se neke dve grane seku na $n + 1$-vom nivou.

Dakle, nikoje dve grane se ne seku na bilo kom nivou, pa je debljina knjige svakog stabla 1. QED.

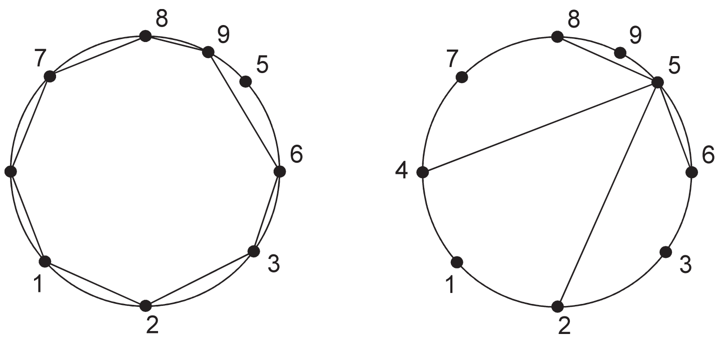
Primer. Debljina knjige sledećeg grafa (slika 2) je 2:

Dokaz. Obojimo čvorove 2, 4, 6, 8 u crveno, a 1, 3, 7, 9 u plavo. Nacrtajmo crvene čvorove i čvor 5 na kružnicu (predstavićemo graf pomoću cirkularnog modela). Posmatrajmo dva crvena čvora koja imaju zajedničkog plavog suseda, npr. 2 i 4. Čvor 1 se mora nalaziti na „manjem" luku određenom sa 2 i 4 (na onom luku na kome se ne nalaze dosad nacrtani čvorovi), jer bi se inače grana 12 ili 14 sekla sa nekom dosad nacrtanom granom. Dakle, 2 i 4 su susedni na kružnici. Slično dobijamo da su 2 i 6, 6 i 8, 8 i 4 susedni. Dakle, čvorove 2, 4, 6, 8 moramo nacrtati baš u tom redo-



Slika 2

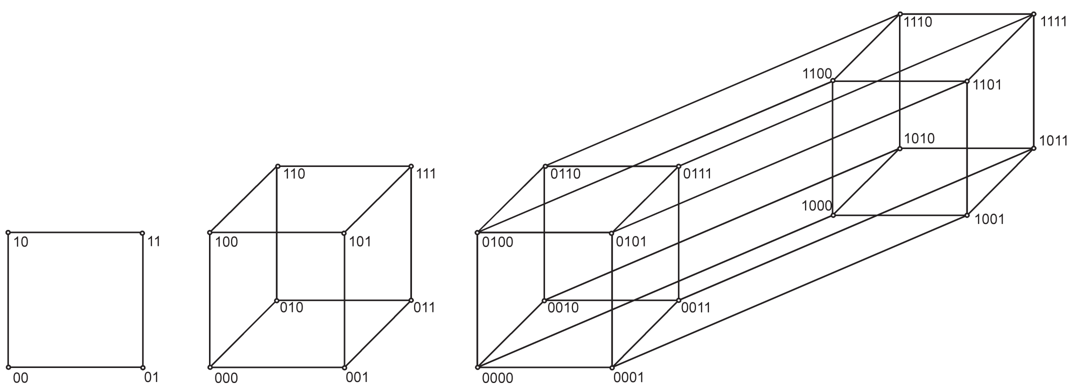
sledu. Čvor 5 mora biti između neka dva od ovih čvorova, što je kontradikcija. Dakle, ovaj graf se ne može potopiti u knjigu sa jednom stranom. Pokažimo da se može potopiti u knjigu sa 2 strane (slika 3):



Slika 3

4.3 Debljina knjige za hiperkocke

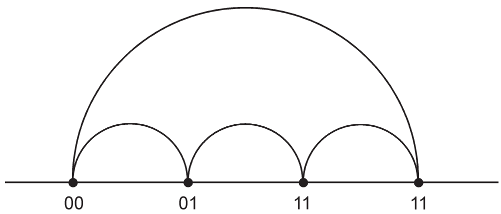
n-dimenzionalna hiperkocka je graf sa 2^n čvorova, koji su označeni različitim n-torkama nula i jedinica. Dva čvora su povezana ako se odgovarajuće n-torke razlikuju na tačno jednom mestu. Na primer, za $n = 2$, 3, 4 dobijamo sledeće grafove (slika 4):



Slika 4

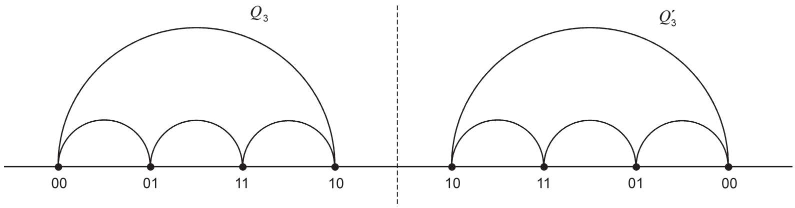
Prvo, dokažimo indukcijom da se Q_n može potopiti u knjigu sa $n - 1$ stranom:

Za $n = 2$, hiperkocku možemo nacrtati na sledeći način (slika 5):



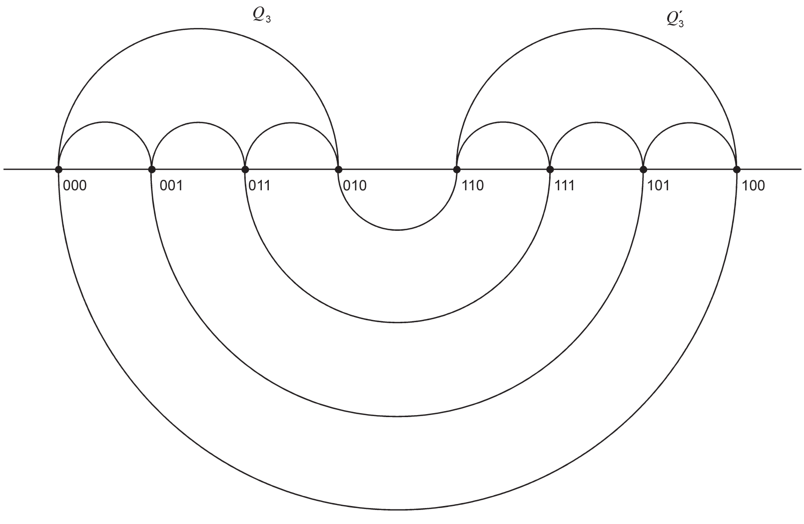
Slika 5

Pretpostavimo da se Q_n može potopiti u knjigu sa n strana. Posmatrajmo taj crtež. Neka su čvorovi, sa leva na desno, označeni sa a_1, a_2,…, a_{2n}. Preslikajmo Q_n osnosimetrično u odnosu na neku pravu koja se nalazi desno od a_{2n} i normalna je na pravu određenu čvorovima. Označimo sa Q'_n sliku Q_n. Na primer, za $n = 2$ ćemo dobiti sledeći crtež (slika 6):



Slika 6

Ispred čvorova Q_n dopišimo nule, a ispred čvorova Q_n jedinice (sada imamo čvorove $0a_1$, $0a_2$,…, $0a_{2^n}$, $1a_{2^n}$,…, $1a_2$, $1a_1$). Dodajmo knjizi još jednu stranu. Na tu stranu nacrtajmo grane $(0a_1,1a_1)$, $(0a2,1a_2)$,…, $(0a_{2^n}$, $1a_{2^n})$. Nikoje dve od ovih grana se ne seku (posmatrajmo grane $(0a_i,1a_i)$ i $(0a_j,1a_j)$, za $i > j$. Po konstrukciji, 0ai se nalazi levo od $0a_j$, a $1a_i$ desno od $1a_j$, tj. raspored čvorova je $0a_i - 0a_j - 1a_j - 1a_i$, pa se ove grane ne seku). Sada (za $n = 2$) imamo sledeće (slika 7):



Slika 7

Pošto smo nacrtali $2^{n-1} \cdot 2 + 2^n = 2^{n+1}$ grana, i pri tom smo spajali samo čvorove čiji se brojevi razlikuju na tačno jednom mestu, dobili smo Q_{n+1}. Nikoje dve grane se ne seku, pa smo dokazali da se Q_{n+1} može potopiti u knjigu sa n strana.

Dakle, Q_n se može potopiti u knjigu sa n – 1 stranom. Treba još dokazati da se Q_n ne može potopiti u knjigu sa manje strana.

5 Određivanje $\nu_k(G)$ i $p(G)$ pomoću kompjutera

Algoritam za određivanje tačnog broja $\nu_k(K_N)$ je prvi put opisan u radu Buchheim i Zheng (2006), gde su ga autori upotrebili za izračunavanje $\nu_k(K_n)$ za $k = 2$ i n ≤ 13. No, 2012, u radu Abrego *et al*. (2013) je za sve n dokazano da je $\nu_k(K_n) = Z(n)$, gde je

$$Z(n) = \frac{1}{4}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor.$$

Godine 2013, de Klerk i saradnici u svom radu radu (De Klerk *et al*. 2013), dobili su tačne brojeve za $\nu_k(K_n)$ za $k = 3, 4, 5$, i $n = 7, 8, \ldots 15$. Svi ovi, kompjuterski dobijeni, rezultati potvrđuju još nedokazanu hipotezu da je $\nu_k(K_n) = Z_k(n)$ (videti sekciju 2). U daljem tekstu dajemo opis algoritma koji je pri tome korišćen, i koji smo implementirali uz neke dodatne optimizacije.

Prvo nacrtamo graf G na jednu stranu (za sve moguće permutacije čvorova nactramo po jedan crtež). Tako dobijamo crteže $D_1, D_2, \ldots, D_{n!}$. Za svaki od tih crteža konstruišemo novi graf G_i', tako da su čvorovi G_i' grane početnog grafa, a dva čvora u G_i' su povezana ako se njima odgovarajuće grane seku na crtežu D_i. Zatim za sve G_i' odredimo hromatski broj $\chi(G)$, broj boja kojima je potrebno obojiti čvorove grafa tako da nikoja dva susedna čvora nisu iste boje. Najmanji od dobijenih hromatskih brojeva je $p(G)$. Za računanje hromatskog broja koristili smo standardni metod, svođenjem na problem zadovoljivosti iskaznih formula (SAT):

Neka je dat graf $G = (V, E)$ sa $|V| = n$ čvorova numerisanih od 1 do n, i želimo da proverimo da li se on može obojiti sa k boja. Uvodimo promenljive:

$$x_i^j = \begin{cases} \text{TAČNO,} & \text{ako čvor } i \text{ ima boju } j \\ \text{NETAČNO,} & \text{inače} \end{cases}$$

Tada treba da bude ispunjeno sledeće:

$$\left(\bigwedge_{(i,j)\in E, 1\leq c\leq k} (\neg x_i^c \vee \neg x_j^c) \right) \wedge \left(\bigwedge_{i\in V} (\bigvee_{1\leq c\leq k} x_i^c) \right).$$

Prva zagrada znači da ni jedna grana ne sme spajati dva susedna čvora iste boje, a druga da svaki čvor mora biti obojen nekom bojom. Ovako svedeni problem bojenja grafa se može rešiti pomoću neke od postojećih biblioteka za rešavanje SAT problema.

Sa druge strane, određivanje $\nu_k(G)$ je u stvari ekvivalentno problemu max-k-cut, tj. problemu bojenja čvorova grafa tako da broj grana koje spajaju različito obojene čvorove bude maksimalan. Dalje taj problem se može svesti na maxium satisfability problem (problem zadovoljavanja što većeg broja iskaznih formula). Konkretno, potrebno je za svaki graf G'_i izračunati $|E(G'_i)|$-max-k-cut(G'_i) (gde je $|E(G'_i)|$ broj grana grafa G'_i, a max-k-cut(G') maksimalan broj grana sa različito obojenim krajevima, pri bojenju sa k boja). Najmanji od dobijenih brojeva je $\nu_k(G)$. Za egzaktno računanje smo koristili metod svođenja na težinski MAX-SAT, koji je jako sličan onom za bojenje grafa sa k boja, samo što iskazi oblika $\vee_{1\le c\le k} x_i^c$, $i \in V$ dobijaju težinu $k|E|$.

Iako gore opisan algoritam jeste korektan, on u tom obliku nije pogodan za implementaciju na računaru, prvenstveno zato što je računanje $\chi(G)$ i max-k-cut(G) za svaku permutaciju čvorova zahteva previše vremena. Zato, koristimo nekoliko načina da minimizujemo broj grafova za koje ćemo morati eksplicitno da računamo $\chi(G)$ i max-k-cut(G).

Pre svega, primetimo da se često dešava da za neka dva grafa G'_i i G'_j, nastala od različitih permutacija čvorova π_i i π_j, dobijemo crteže D_i i D_j koji izgledaju isto, samo su im čvorovi obeleženi drugačije. To znači da su i početni grafovi G'_i i G'_j morali da budu izomorfni, odnosno „isti” do na drugačije obeležavanje njihovih čvorova. Jedan takav izomorfizam (odnosno, u ovom slučaju automorfizam, jer nam trebaju izomorfizmi grafa samog sa sobom) se može predstaviti jednom permutacijom čvorova – brojeva 1, 2,…, $|V|$. Neka je skup svih automorfizama nekog grafa G: $\mathrm{Aut}(G) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$. Koristeći se ovime, pri generisanju svih permutacija čvorova možemo „preskočiti” neku permutaciju đi ako se ona može dobiti kompozicijom $\alpha' \circ \pi'$ neke prethodne permutacije π' i nekog automorfizma $\alpha' \in \mathrm{Aut}(G)$.

Iako i generisanje automorfizama proizvoljnog grafa spada u klasu NP problema, u praksi postoje algoritmi koji u prosečnom slučaju rade u linearnom vremenu.

Tabela 1. Vrednosti $\nu_k(K_n)$ za male k i n

k	n													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
2	0	0	0	1	3	9	18	36	60	100	150	225	315	441
3	0	0	0	0	0	2	5	9	20	34	51	83	121	165
4	0	0	0	0	0	0	0	3	7	12	18	34	?	?
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	9	?	?	?

Zaključak

U ovom radu su navedeni dosadašnji rezultati iz oblasti potapanja grafova u knjige, kao i originalni rezultati autora. Dosadašnji rezultati iz ove oblasti su uglavnom vezani za kompletne grafove ili za gornja i donja ograničenja za k-tostrani presečni broj grafova. U ovom radu je dat kompletan dokaz o najboljoj donjoj granici za $\nu_k(G)$, za proizvoljan graf G, detaljan dokaz da je debljina knjige za kompletan graf K_n jednaka $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, originalni rezultati autora vezani za potapanje nekih specijalnih klasa grafova u knjige, kao i algoritam za određivanje $\nu_k(G)$ i $p(G)$.

Literatura

Ábrego B. M., Aichholzer O., Fernández-Merchant S., Ramos P., Salazar G. 2013. The 2-Page Crossing Number of K_n. *Discrete and Computational Geometry*, **49** (4): 747.

Buchheim C., Zheng L. 2006. Fixed linear crossing minimization by reduction to the maximum cut problem. U *Proceedings of 12th Annual International Conference "Computing and combinatorics"* (ed. D. Z. Chen, D. T. Lee). Springer, str. 507-516.

Chung F. R., Leighton F. T., Rosenberg A. L. 1987. Embedding graphs in books: a layout problem with applications to vlsi design. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **8** (1): 33.

De Klerk E., Pasechnik D. V., Salazar G. 2012. Book drawings of complete bipartite graphs. arXiv preprint arXiv:1210.2918.

De Klerk E., Pasechnik D. V., Salazar G. 2013. Improved lower bounds on book crossing numbers of complete graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **27** (2): 619.

Garey M. R., Johnson D. S. 1983. Crossing number is np-complete. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, **4** (3): 312.

Guy R. K. 1960. A combinatorial problem. *Nabla* (Bulletin of the Malayan Mathematical Society), **7**: 68.

Riskin A. 2003. On the outerplanar crossing numbers of $K_{m,n}$. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, **39**: 16.

Shahrokhi F., Székely L. A., Sýkora O., Vrto I. 1996. The book crossing' number of a graph. *Journal of Graph Theory*, **21** (4): 413.

Yannakakis M. 1989. Embedding planar graphs in four pages. *Journal of Computer and System Sciences*, **38** (1): 36. 18th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Berkeley, CA, 1986).

Kristina Silađi and Daniel Silađi

Embedding Graphs in Books

Embedding graphs in books is a topic in geometrical and topological graph theory and it has great applications in VLSI (Very Large Scale Integration) design, the process of creating integrated circuits by combining a large number of transistors onto a single chip. A k-page book consists of k half-planes (pages), with their common intersection being a line – the spine of the book. The vertices of a graph are then placed along the spine, and each edge is drawn on a page. If we can arrange the edges in a way that no two of them intersect each other, we say we have embedded that graph in the book. The problem of determining the minimal number of edge-crossings when the number of pages is fixed, is also interesting. In this paper we give complete proofs of some newer results in this field (book thickness for complete graphs, lower bound for the k-page crossing number, …). Also, a computer algorithm for determining the optimal drawing of an arbitrary graph into a book is presented and implemented. At the end of the paper, we give original results concerning the drawing of some classes of graphs in a book.