Sara Bogojević i Marko Kabić

Analiza finansijskih kriza korišćenjem zakona skaliranja kao osnove analogije finansijskih tržišta sa fizičkim sistemima

U ovom radu ispitivane su specifičnosti ponašanja tržišta akcija za vreme kriza. Korišćeni su rezultati ranijih radova koji pokazuju da u periodima kriza kretanje cena akcija postaje više korelisano, budući da cene velikog broja akcija počinju da opadaju istovremeno. Definisana je veličina (metrika) koja odražava ovaj efekat i posmatrano je njeno ponašanje u periodima visokih korelacija, koje smatramo krizama. Pokazano je da samo u periodima kriza ova metrika stepeno zavisi od vremena, odnosno ispoljava zakon skaliranja. Ovaj zakon je karakterističan za kritične pojave u brojnim fizičkim sistemima, što je omogućilo stvaranje analogije između finansijskih tržišta i fizičkih sistema. Dobijena analogija je iskorišćena za predviđanje ulaska finansijskih tržišta u kritični, tj. krizni režim.

Uvod

Zakon skaliranja, uopšteno govoreći, predstavlja stepenu vezu između neke dve veličine. Razlog zašto je ovaj zakon interesantan fizičarima je to što je on karakterističan za kritične tačke faznih prelaza fizičkih sistema.

Fazni prelazi se najčešće vezuju za fluide, u kom slučaju pod različitim fazama, odnosno stanjima, najčešće podrazumevamo čvrsto, tečno i gasovito, dok pod faznim prelazom podrazumevamo prelazak sistema iz jednog stanja u drugo. Veličine kojima opisujemo stanje fluida su gustina, temperatura i pritisak. Gustina predstavlja fizičko svojstvo fluida, dok temperatura i pritisak opisuju spoljašnje uslove, pa kažemo da je fluid u jednoj fazi dok god njegova gustina, na određenom pritisku i temperaturi ostaje nepromenjena. Ovo znači da je za svako stanje fluida na određenom pritisku i temperaturi karakteristična određena gustina, pa tako gustina predstavlja parametar na osnovu kojeg možemo odrediti trenutno stanje fluida. Međutim, primećeno je da postoje vrednosti pritiska i temperature, pri kojima ova karakteristična gustina za dva različita stanja postaje jednaka (za vodu je to približno na temperaturi od 647 K, pritisku od 22064 Pa i gustini od 0.322 g/cm^3). Ovo znači da na tom pritisku i temperaturi više ne možemo napraviti razliku među tim stanjima odnosno fazama, jer fluid pokazuje ponašanje karakteristično za oba stanja. Ova vrednost temperature, pritiska i gustine se naziva kritična tačka.

Ovo se može uopštiti za sve fizičke sisteme. Kažemo da je sistem u istoj fazi dok god njegova fizička svojstva ostaju nepromenjena. Kada na osnovu fizičkih svojstava sistema ne možemo tačno odrediti u kojoj je on fazi, kažemo da se sistem nalazi u kritičnoj tački. Posle fluida, kritična tačka se najčešće vezuje za fizički sistem feromagneta. Feromagneti su supstance koje usled delovanja spoljašnjeg magnetnog polja ostaju namagnetisane i po završetku njegovog delovanja. Međutim, ovakvo ponašanje feromagneta ispoljava se samo na temperaturama manjim od kritične, koja se još naziva i Kirijeva temperatura. Ovo se smatra faznim prelazom jer se feromagnetu menja magnetizacija. Stanje feromagneta opisuje se jačinom spoljašnjeg magnetnog polja, temperaturom i magnetizacijom. Od pomenutih veličina, samo magnetizacija predstavlja svojstvo samog feromagneta, dok ostale veličine predstavljaju spoljašnje uslove. Magnetizacija (M) je veličina koja

Sara Bogojević (1995), Beograd, Gospodar Jovanova 18, učenica 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Marko Kabić (1993), Novi Sad, Puškinova 6/17, učenik 4. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

MENTOR: dr Miloš Božović, Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu

pokazuje u kojem je stepenu supstanca namagnetisana. Budući da iznad kritične temperature feromagnet nema magnetna svojstva, to je $M_{T>T_C} \approx 0$, gde je T_C Kirijeva temperatura. Na temperaturama manjim od kritične, ova veličina počinje stepeno da zavisi od temperature, tačnije dolazi do skaliranja koje se matematički može zapisati:

$$\frac{M_T}{M_{T_C}} \propto \left|\frac{T - T_C}{T_C}\right|^{\beta}, \text{ za } T < T_C$$

Vrednost parametra β je približno ista i za naizgled potpuno različite sisteme (kao što su neki feromagneti i neki fluidi) i naziva se kritični eksponent. Time se svi fizički sistemi mogu svrstati u klase univerzalnosti, unutar kojih se vrednosti ovog parametra za sve sisteme ne razlikuju značajno (Stanley 1971).

Primećeno je da se zakoni skaliranja, osim u fizičkim sistemima, uočavaju u raznim oblicima i prilikom analize drugih, na prvi pogled sasvim različitih sistema, poput finansijskih tržišta. Finansijska tržišta predstavljaju organizovan prostor ili kompjuterizovanu trgovačku mrežu, na kojoj se nude i traže finansijski instrumenti. U zavisnosti od instrumenta kojim se trguje, ona mogu biti univerzalna (ukoliko se trguje sa više vrsta materijala) i specijalizovana (ukoliko se trguje sa samo jednom vrstom materijala). U ovom radu, kao primer finansijskog tržišta posmatrano je tržište specijalizovano za akcije.

U prethodnim radovima je pokazano kako se za veličinu koja izražava stanje tržišta akcija i ispoljava zakon skaliranja u periodima kriza može uzeti stopa prinosa (Mukherjee i Sarkar 2011), koja se definiše kao odnos dobijenog ili izgubljenog novca na neku investiciju (u našem slučaju akciju) i uloženog novca. U ovom radu će biti ispitano da li zakon skaliranja važi u periodima kriza i za srednje euklidsko rastojanje – veličinu kojom se takođe može prikazati stanje tržišta. Pod krizom smatramo periode visoke korelisanosti kretanja cena akcija (što je pokazano da je posledica činjenice da cene svih akcija opadaju (Sandoval i Franca 2012; Mizuno *et al*. 2006; Longin i Solnik 1999)). Ukoliko se pokaže da zakon skaliranja za ovu veličinu važi samo u periodima kriza, tada bi se mogla uspostaviti analogija sa fizičkim sistemima, što bi se moglo iskoristiti za predviđanje kriza. Prilikom računanja srednjeg euklidskog rastojanja, biće korišćene metode matematičke statistike, slično radovima (Sandoval 2012; Mizuno *et al*. 2006).

Koeficijent korelacije

Prilikom analize tržišta akcija, vrlo često se akcije posmatraju kao uređene n-torke, pri čemu svaki element, odnosno koordinata, sadrži informaciju o stanju cene ili promene cene te akcije u određenom trenutku. Time se svakoj akciji pridružuje tačno jedna tačka u prostoru, što omogućava lakšu statističku obradu podataka. Tačnije, uređena n-torka u statističkom smislu označava diskretnu slučajnu promenljivu koja može uzimati tačno one vrednosti koje su zadate njenim koordinatama. Pored toga, ovo osigurava očuvanje poretka, odnosno garantuje da će se uvek upoređivati vrednosti istih koordinata, odnosno informacije o cenama (ili promenama cena) akcija u istom trenutku, jer nema smisla upoređivati cenu (ili promenu cene) jedne akcije u jednom trenutku sa cenom (ili promenom cene) neke druge akcije u nekom drugom trenutku.

U ovom radu, svaka akcija je predstavljena uređenom n-torkom, čiji svaki element (koordinata) predstavlja dnevni aritmetički prinos cene te akcije $r_{t,i}$ za određeni dan t, koji je određen formulom:

$$r_{t,i} = \frac{S_{t,i} - S_{t-1,i}}{S_{t-1,i}}$$

gde je $S_{t,i}$ cena posmatrane akcije i za dan t, a $S_{t-1,i}$ cena te akcije prethodnog dana. U daljem tekstu analizu akcija svodimo na analizu ovako formiranih, uređenih n-torki.

Da bismo definisali koeficijent korelacije dve uređene n-torke realnih brojeva, koju ćemo kasnije koristiti za definisanje metrike, moramo prvo definisati nekoliko statističkih pojmova. U daljem tekstu se pod oznakom smatra srednja vrednost koordinata odgovarajuće uređene n-torke X.

Definicija 1. Neka je $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tada se pod standardnom devijacijom n-torke X, u oznaci $\sigma(X)$, smatra izraz:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Standardna devijacija zapravo predstavlja srednje kvadratno odstupanje koordinata od srednje vrednosti. Jedan razlog zašto se koristi kvadratna sredina umesto aritmetičke je što se prilikom korišćenja kvadratne sredine ne mora paziti na znak izraza $x_i - \bar{x}$. Drugi, mnogo važniji, je što je kvadrat mnogo osetljiviji na promene, pa će se male vrednosti $x_i - \bar{x}$, posle kvadriranja još više umanjiti, dok će se velike vrednosti još više povećati. Standardnu devijaciju možemo shvatiti i kao meru rasutosti koordinata na brojevnoj pravoj, u odnosu na srednju vrednost. U ekonomiji se ova veličina često koristi kao mera rizika, odnosno volatilnost nekog tržišta, pri čemu se meri standardna devijacija prosečnog prinosa.

Definicija 2. Neka je $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tada se pod kovarijansom uređenih n-torki X i Y, u oznaci $\mathrm{cov}(X,Y)$, smatra izraz:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Kovarijansa zapravo predstavlja uopštenje varijanse za dve uređene n-torke, odnosno važi $\mathrm{var}(X) = \mathrm{cov}(X,X)$. Slično varijansi, i kovarijansa predstavlja rasutost, ali jedne n-torke u odnosu na drugu. Ukoliko je $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, tada ne postoji linearna veza između X i Y, dok u ostalim slučajevima postoji linearna veza, koja u zavisnosti od znaka kovarijanse može biti rastuća ili opadajuća. Razlog zašto se ovo ne koristi kao mera korelacije je što ova veličina ima dimenzije, odnosno jedinicu, pošto zavisi od toga kojih su jedinica X i Y. To znači da, ukoliko bi, na primer, koordinate n-torke X prvobitno predstavljale cene neke akcije za period od n dana izraženu u jednoj valuti, a zatim sve te cene pretvorene u neku drugu valutu, vrednost kovarijanse će se promeniti. Zbog toga se uvodi novi koeficijent korelacije, koja je bezdimenzionalna veličina. Postoji više vrsta ovih koeficijenata, od kojih u ovom radu koristimo Pearsonov i Spearmanov koeficijent korelacije.

Definicija 3. Neka su X i Y uređene n-torke. Tada se pod Pearsonovim koeficijentom korelacije uređenih n-torki X i Y, u oznaci $\rho_P(X,Y)$, smatra izraz:

$$\rho_P(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$$

Pearsonov korelacioni koeficijent može da ima vrednosti u intervalu [–1, 1]. Ako n-torke X i Y predstavimo kao koordinate n tačaka u ravni, a vrednost $\rho_P(X,Y) = 1$, onda svih n tačaka pripadaju istoj pravoj čiji je koeficijent pravca pozitivan. Ako je vrednost $\rho_P(X,Y) = 0$, onda kroz date tačke ne možemo da provučemo pravu, dok vrednost $\rho_P(X,Y) = -1$ znači da tačke pripadaju pravoj čiji je koeficijent pravca negativan. Mana ovog koeficijenta korelacije je što on odražava samo linearnu zavisnost, zbog čega se često koristi i Spearmanov koeficijent (u oznaci $\rho_S(X,Y)$), koji odražava sve zavisnosti koje su monotone.

Za razliku od Pearsonovog, Spearmanov koeficijent ne uzima tačne numeričke vrednosti n-torki već samo njihov rang, odnosno poziciju koju ta numerička vrednost ima po veličini, u datoj n-torci. Zbog istog oblika formule i ovaj koeficijent može uzimati samo vrednosti iz intervala [–1, 1], ali ovde vrednost $\rho_S(X,Y) = 1$ označava da se sa povećanjem vrednosti jedne n-torke povećavaju i odgovarajuće vrednosti druge n-torke. Vrednost $\rho_S(X,Y) = -1$ označava da se povećanjem vrednosti jedne n-torke smanjuju odgovarajuće vrednosti druge n-torke.

Euklidsko rastojanje

Definicija 4. Neka je $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tada se pod euklidskim rastojanjem n-torki X i Y smatra izraz:

$$d(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - y_i)^2}$$

i predstavlja rastojanje tačaka X i Y u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru.

Ako je $\rho(X,Y)$ koeficijent korelacije, ova formula se može svesti na oblik (Mizuno *et al.* 2006):

$$d(X,Y) = \sqrt{2n(1 - \rho(X,Y))}$$

U zavisnosti od toga da li se koristi Pearsonov ili Spearmanov koeficijent korelacije, razlikujemo $d_P(X,Y)$ i $d_S(X,Y)$, redom.

Smisao ovog rastojanja je da su tačke bliže jedna drugoj u prostoru što su njihove koordinate više korelisane. Konkretno, u našem radu, ovo znači da što je kretanje cena neke dve akcije više korelisano, tačke koje ih predstavljaju u prostoru su bliže jedna drugoj. Međutim, ovo i dalje ne može da predstavlja metriku koja će opisivati stanje tržišta, budući da opisuje samo stanje dve akcije. Zbog toga uvodimo pojam srednjeg euklidskog rastojanja.

Pretpostavimo da u posmatranom uzorku imamo više akcija. Tada je potrebno izračunati $d(X,Y)$ za svake dve akcije X i Y iz posmatranog uzorka, a zatim izračunati srednju vrednost tako dobijenih euklidskih rastojanja, što predstavlja veličinu koja više ne zavisi od samo dve akcije, već od svih akcija iz posmatranog uzorka. Ova veličina se naziva srednje euklidsko rastojanje i biće korišćena kao metrika koja opisuje stanje tržišta. Razlog zašto se ovo često koristi kao metrika je taj što u formuli za euklidsko rastojanje figuriše koeficijent korelacije. Kao što je već rečeno, da bismo ispitali da li neka vrsta zakona skaliranja može da se primeni i na finansijska tržišta, potrebno nam je da pronađemo neku karakteristiku tog tržišta na osnovu koje možemo da znamo u kom stanju se tržište nalazi. Srednje euklidsko rastojanje kao funkcija od vremena zadovoljava ove kriterijume upravo zbog toga što zavisi od koeficijenta korelacije.

Neka X i Y predstavljaju prinose akcija kompanija X i Y za n dana. Ako je $\rho(X,Y)$ blizu jedinice, to znači da cene akcija tih kompanija zavise jedna od druge ili da postoji neki spoljašnji faktor koji utiče na cene akcija obe ove kompanije. Pošto prvi slučaj ne važi za kompanije iz posmatranog uzorka, mora da postoji neki faktor koji utiče na cene njihovih akcija. Taj spoljašnji faktor može da bude kriza, ali može da bude i neki događaj čiji se efekat na cene akcija oseća kratkotrajno. U oba ova slučaja će vrednost metrike opadati zato što će korelacije prinosa parova akcija biti visoke. Na dobijenim graficima za srednje euklidsko rastojanje postoje periodi kad metrika iznenadno i dugotrajno opada, dok je u drugim periodima pad metrike manji i kratkotrajan. Pokazano je da korelacija cena akcija raste u periodima kriza (Sandoval 2012; Mizuno *et al*. 2006; Longin i Solnik 1999), pošto ovi periodi traju godinama, to bi značilo da će srednje euklidsko rastojanje da opada duži vremenski period, tj. kontinuirano, kao u prvom slučaju, a ne samo privremeno. Periodi kada se primećuje ovakvo ponašanje metrike su periodi oko lokalnih minimuma metrike i lako ih je izdvojiti. Teško je odrediti tačan trenutak ulaska u krizni režim, zato ne možemo reći da ovakva tendencija u ponašanju metrike potpuno odgovara periodima kad je sistem ušao u krizni režim. Zbog toga pratimo samo one minimume koji odgovaraju trenucima maksimalne volatilnosti tržišta.

Metod

Kao uzorak finansijskog tržišta, koristili smo dnevne podatke o cenama na zatvaranju akcija kompanija koje ulaze u sastav Dow Jones Industrial Average (DJIA) (korigovane za efekte isplate dividendi i promene broja akcija u slobodnom berzanskom prometu) za period od 13. juna 2001. do 30. decembra 2011. (podaci su preuzeti sa Thompson Reuters Datastreama). DJIA predstavlja drugi najstariji tržišni indeks u SAD-u, koji sadrži podatke za 30 najvećih kompanija koje pokrivaju skoro sve industrijske grane, zbog čega se smatra da je ovo reprezentativan uzorak finansijskog tržišta SAD-a. Spisak kompanija koje ulaze u sastav DJIA se često menja. Da bismo minimalizovali efekat ovih promena i imali što konzistentnije podatke, uzeli smo pomenuti interval vremena umesto nekog dužeg.

Od ovako dobijenih cena akcija pravljena je matrica prinosa, gde kolone predstavljaju prinos akcija različitih kompanija, a svaki red predstavlja dan za koji je računat prinos. Za svaku akciju je računat aritmetički prinos na sledeći način:

$$r_{t,i} = \frac{S_{t,i} - S_{t-1,i}}{S_{t-1,i}}$$

gde je $S_{t,i}$ cena posmatrane akcije i za dan t, $S_{t-1,i}$ cena te akcije prethodnog dana, a $r_{t,i}$ prinos akcija kompanije i dana t. Time je dobijena matrica prinosa koju označavamo sa r, čije kolone sadrže prinose odgovarajućih akcija za svaki dan.

Od matrice r je dobijen niz matrica prinosa, gde svaka sadrži podatke o prinosima akcija za 100 dana, tako što prva matrica (r_1) sadrži podatke za period od 1. do 100. dana, druga (r_2) za period od 2. do 101. dana, i tako redom dok ne prođemo kroz ceo skup podataka. Dakle, opšta i-ta matrica (r_i) sadrži informacije o prinosima od i-tog do $(100 + i - 1)$. Za svaku od dobijenih matrica (r_i) ovog niza računato je euklidsko rastojanje prinosa akcija parova kompanija za oba koeficijenta korelacije, odnosno $d_P(X,Y)$ i $d_S(X,Y)$, odakle je dobijeno prosečno euklidsko rastojanje $\bar{d}_P$ i $\bar{d}_S$, za svaku od matrica.

Time su dobijena dva niza: $(\bar{d}_P)_i$ i $(\bar{d}_S)_i$. Uzastopni članovi ovih nizova srednjeg euklidskog rastojanja pripadaju uzastopnim danima (gde su $(\bar{d}_P)_i$ i $(\bar{d}_S)_i$ pripisani poslednjem danu te matrice). Ova dva niza su predstavljena grafički, u funkciji od vremena. Zbog velike sličnosti dobijenih grafika, u daljem razmatranju, koristili smo samo grafik zavisnosti $\bar{d}_P$ od vremena. Radi jednostavnosti, u daljem tekstu ćemo za $\bar{d}_P$, koristiti oznaku $\bar{d}$.

U ranijim radovima (Fenn *et al*. 2011) korišćen je sličan postupak i razmatrano je kako će se smanjivanjem ili povećavanjem intervala, koji je u našem slučaju 100 dana, menjati srednja korelacija skupa podataka. Kad bismo smanjili dati interval vremena, promene srednje korelacije kroz vreme bi bile izraženije, pa bi i promene srednjeg euklidskog rastojanja bile izraženije, dok povećanje intervala ima suprotan efekat. Promene iz dana u dan su bitne za proučavanje kriza, ali, sa druge strane, za preciznije statističke rezultate, potreban je veći skup podataka. Dati period od 100 dana u dovoljno dobroj meri zadovoljava obe ove potrebe (Fenn *et al.* 2011).

Dobijen je grafik zavisnosti volatilnosti od vremena, gde je volatilnost računata kao standardna devijacija prosečnih prinosa. Izraženiji lokalni minimumi na grafiku srednjeg euklidskog rastojanja u zavisnosti od vremena odgovaraju maksimumima volatilnosti, što je glavni razlog zašto ove periode povezujemo sa krizama. Kao što je već rečeno, ovi minimumi odgovaraju visokoj korelisanosti kretanju cena akcija, što je u najvećem broju slučajeva posledica ulaska u krizni režim [3-5]. Za svaki izabrani minimum, posmatrali smo okolinu minimuma, za koji smo ispitivali hipotezu da važi zakon skaliranja u sledećem obliku:

$$\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right| = \left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|^{\beta} \qquad (1)$$

gde je $\bar{d}_t$ srednje euklidsko rastojanje u trenutku t, a t_C trenutak u kom srednje euklidsko rastojanje ima minimalnu vrednost $\bar{d}_{t_C}$ unutar posmatranog vremenskog intervala koga smatramo krizom.

Na prvi pogled, ne uočava se jasna analogija veličine $\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ sa veličinom $\frac{M_T}{M_{T_C}}$ kod feromagneta. Međutim, minimum funkcije M_T je 0, dok je funkcija $\bar{d}_t$ uvek strogo veća od 0, i zbog toga je malo drugačiji oblik zavisnosti.

Radi lakšeg obrađivanja podataka, zavisnost (1) smo sveli na oblik:

$$\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right| = \beta \times \ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right| \qquad (2)$$

čime se ispitivanje početne veze svelo na ispitivanje linearne veze između logaritmovanih veličina, iz koje se parametar β može dobiti kao koeficijent pravca. Uočili smo veće lokalne minimume srednjeg euklidskog rastojanja i za svaki minimum smo izdvojili intervale pre i posle minimuma gde može da se primeti ponašanje metrike specifično za krize. Ispitali smo da li važi dati zakon skaliranja za vrednosti srednjeg euklidskog rastojanja koje pripadaju ovim intervalima. Analizirali smo zasebno intervale pre i posle minimuma, za slučaj da zakonitost važi samo pre ili samo posle minimuma.

Da bismo ispitali univerzalnost β, svaki od perioda pre odnosno posle minimuma razmatrali smo posebno, čime smo dobili interval kojem pripada β za svaki od perioda. Ako bi postojalo β koje pripada svakom od intervala pre minimuma i drugo β koje pripada svakom od intervala posle minimuma, mogli bismo da zaključimo da postoji univerzalno β.

Zatim smo sve periode pre minimuma grupisali u jedan skup podataka i sve periode posle minimuma u drugi skup podataka. Vrednost β za oba ova skupa podataka ne bi nosila nikakvu novu informaciju, ali smo hteli da testiramo hipotezu da ovakva linearna zavisnost (za bilo kakvo β) postoji u velikoj meri u periodima kriza, a ne postoji u opštem slučaju. Da bismo ovo ispitali moramo da ocenimo kvalitet linearnog fita u oba ova slučaja. Za ovo je poželjno da se uzme veći skup podataka od onog koji sadrže intervali ako ih gledamo zasebno, što je i razlog zašto smo grupisali podatke.

Da bismo ocenili kvalitet linearne regresije, tj. fita, računat je koeficijent determinacije dat formulom:

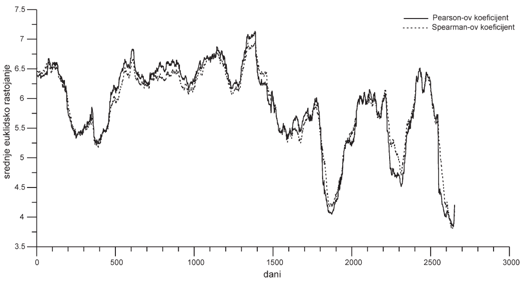
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

gde je f_i vrednost funkcije (u tački i) koja najbolje odgovara datim tačkama, a $\bar{y}$ srednja vrednost y koordinata svih tačaka. Koeficijent determinacije može da ima vrednosti u intervalu [0, 1], gde se za vrednosti blizu 1 smatra da dobijena prava „odgovara" tačkama, dok za vrednosti blizu 0 ne „odgovara" tačkama.

Rezultati i diskusija

Dobijeni grafik zavisnosti srednjeg euklidskog rastojanja od vremena prikazan je na slici 1. Na slici su prikazani grafici dobijeni za oba koeficijenta korelacije, da bi se jasnije uočila sličnost, koja je i razlog zašto je kasnije korišćen samo jedan koeficijent.

Uzimajući u obzir činjenicu da Spearmanov koeficijent korelacije, ne uzima konkretne numeričke vrednosti n-torki, zbog velike sličnosti ove dve funkcije, možemo zaključiti da dobijeni rezultati i za Pearsonov koeficijent korelacije nisu u velikoj meri zavisni od konkretnih vrednosti cena akcija kompanija iz uzorka, već od kretanja cena, tj. da mogu da se generalizuju.

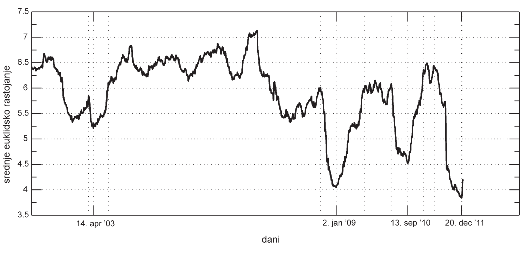


Slika 1. Zavisnost srednjeg_euklidskog rastojanja_ korišćenjem Pearsonovog ($\bar{d}_P$) i Spearmanovog ($\bar{d}_S$) koeficijenta korelacije od vremena.

Figure 1. The average Euclidean distance as a function of time using the Pearson ($\bar{d}_P$) and Spearman ($\bar{d}_S$) correlation coefficient

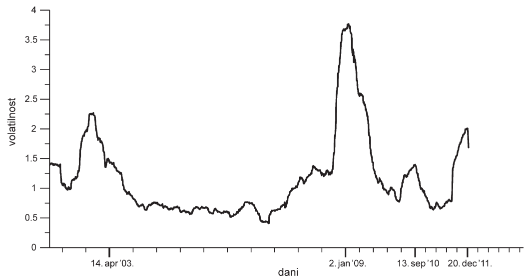
Na grafiku na slici 2 označena su 4 minimuma koje smo posmatrali, kao i intervali u okolini minimuma u okviru kojih primećujemo ponašanje specifično za krize. Radi lakšeg snalaženja, označeni su datumi minimuma, umesto rednih brojeva dana.

Na slici 3, prikazan je grafik zavisnosti volatilnosti od vremena, na kome su takođe označeni datumi posmatranih minimuma metrike, koji odgovaraju maksimumima volatilnosti.



Slika 2. Zavisnost srednjeg euklidskog rastojanja od vremena. Srednje euklidsko rastojanje je računato korišćenjem Pearsonovog koeficijenta korelacije. Obeleženi datumi predstavljaju posmatrane minimume, kada smatramo da je došlo do krize.

Figure 2. The average Euclidean distance as a function of time. We calculated the average Euclidean distance using the Pearson correlation coefficient. The selected dates represent the minimums which we believe correspond to periods of crises.



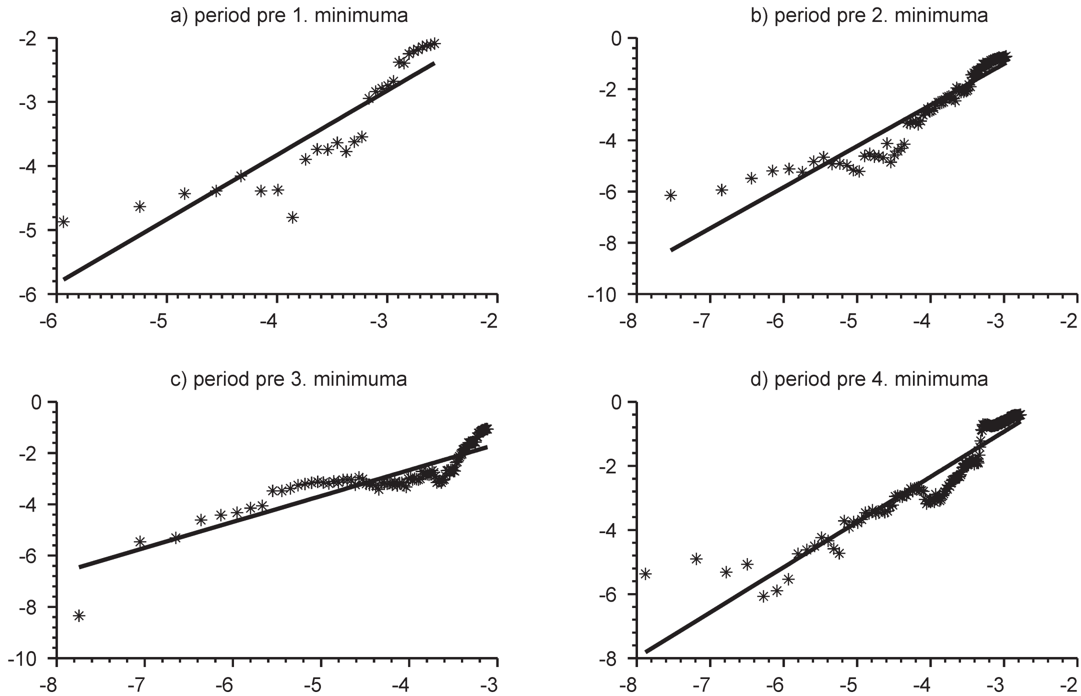
Slika 3. Zavisnost volatilnosti posmatranog uzorka od vremena, gde je volatilnost računata kao standardna devijacija prosečnih prinosa. Obeleženi datumi predstavljaju posmatrane minimume metrike, odnosno maksimume volatilnosti, kada smatramo da je došlo do krize.

Figure 3. The volatility of the data that was used as a function of time. We calculated the volatility as a standard deviation of the average stock returns. The selected dates represent the minimums of the average Euclidean distance as well as the maximums of volatility, which we believe correspond to periods of crises.

Od izdvojenih minimuma, jedino minimum iz 2. 1. 2009. predstavlja krizu u najužem smislu, poznatiju kao Svetska finansijska kriza. Svetska ekonomska kriza 2007-2009. god. posledica je neodgovornog ponašanja komercijalnih i investicionih banaka koje su u želji za zaradom odobravale hipotekarne kredite klijentima koji nisu bili kreditno sposobni. Takvi klijenti su se suočavali sa nepovoljnim kreditnim uslovima i visokim naknadama u slučaju kašnjenja u vraćanju kredita.

Nekontrolisano odobravanje hipotekarnih kredita povećalo je ponudu nad tražnjom za hipotekom. Veća ponuda hipoteka (nekretnina) uticala je na smanjenje cena nekretnina. Nemogućnost prodaje nekretnina po tržišnim cenama dovela je do bankrotiranja pet najvećih investicionih banaka u SAD kao i više desetina velikih banaka u svetu (Vunjak i Kovačević 2010). Ova kriza je više ili manje uticala na sve zemlje u svetu i njene posledice se i dalje osećaju u trenutku pisanja ovog rada. Njene posledice su verovatno i jedan od uzroka minimuma srednjeg euklidskog rastojanja iz 13. septembra 2010. i 20. decembra 2011. koje posmatramo u ovom radu.

Svaki od obeleženih intervala pre i posle minimuma je posmatran posebno. Za svaki od perioda pre



Slika 4. Zavisnost $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ od $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$ za periode pre minimuma za svaki minimum pojedinačno, sa prikazanim odstupanjem od linearne zavisnosti

Figure 4. $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ as a function of $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$ for each of the periods before the minimum (a-d for 1-4, respectively), with indicated linear functions

i posle minimuma, dobili smo grafik zavisnosti $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ od $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$, kojim smo, posle fitovanja dobili vrednosti parametra β, kao koeficijent pravca za svaki period posebno. Dobijeni grafici zavisnosti date jednačinom za svaki od intervala pre minimuma su prikazani na slici 4, dok su grafici ove zavisnosti za intervale posle minimuma prikazani na slici 5.

Kada se određuje koeficijent pravca prave (u našem slučaju β) koja najbolje opisuje bilo kakvu zavisnost, dobijamo interval poverenja kome taj koeficijent pripada, gde se za koeficijent pravca uzima sredina intervala. Kvalitet dobijenih vrednosti parametra β ocenili smo koeficijentom determinacije R^2, čije su vrednosti prikazane u tabeli 1, zajedno sa intervalima kojima pripada.

Iz dobijenih rezultata možemo primetiti da je i u periodima pre i u periodima posle minimuma R^2 blizu 1, odnosno da je kvalitet linearnog fita visok (čak 0.9743 u periodu posle najizraženijeg minimuma), što nam govori da u intervalima oko minimuma važi zakon skaliranja u obliku datom jednakošću (1). Takođe, možemo videti da najveća vrednost R^2, odnosno najbolji fit, odgovara najizraženijem minimumu, tj. periodu najveće krize od posmatranih. Ovo nam govori da što je zakon skaliranja izraženiji, to je veća verovatnoća da se radi o periodu krize.

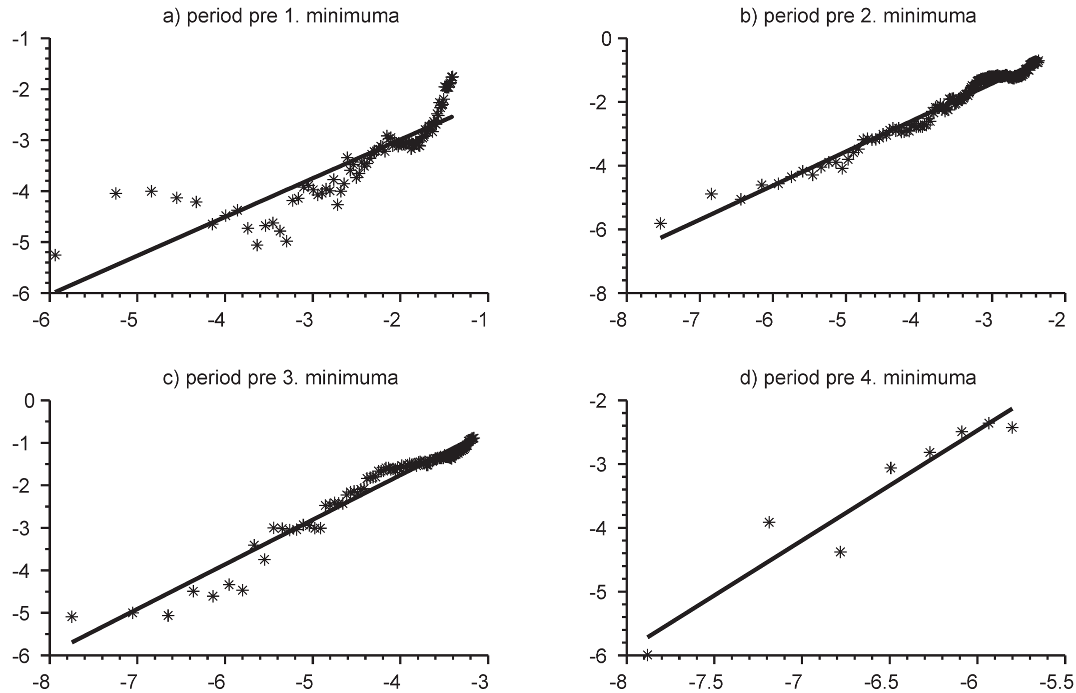
Na prvi pogled, iz tabele 1 vidimo da je presek dobijenih intervala poverenja za β prazan skup, što navodi na zaključak da ne postoji univerzalnost. Da bismo ovo proverili, posmatrajući sve periode pre kriza kao jedan skup skup podataka i sve periode

Tabela 1. Intervali kojima pripada β za svaku krizu posebno, kao i koeficijent determinacije R^2, koji predstavlja kvalitet fita

Minimum	β		R^2	
	Pre	Posle	Pre	Posle
Prvi	[0.8045, 1.2043]	[0.6681, 0.8571]	0.7974	0.7480
Drugi	[1.4885, 1.7211]	[1.0429, 1.0948]	0.8887	0.9743
Treći	[0.9044, 1.1191]	[1.0042, 1.0976]	0.7758	0.9541
Četvrti	[1.3313, 1.4903]	[1.2030, 2.2472]	0.8828	0.9159

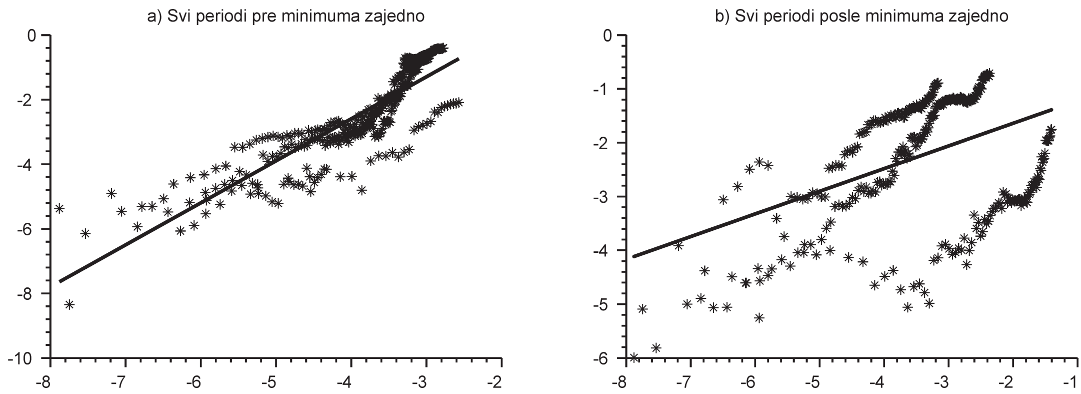
posle kriza kao drugi skup podataka, dobili smo dva grafika zavisnosti date jednačinom (2), koji su prikazani na slici 6.

Slično prethodnom slučaju, dobijene vrednosti parametara β i R^2 su prikazani u tabeli 2. Iako je vrednost visoka za periode pre kriza (0.7267), vidimo da je posle kriza ova vrednost zanemarljiva (svega 0.1922). Ovo nas navodi na zaključak da univerzalnost postoji pre kriza, dok posle kriza to nije slučaj, što bi se moglo objasniti činjenicom da pre kriza ponašanje akcija postaje slično, dok posle krize, svaka akcija počinje da ide takoreći na svoju stranu. Međutim, ovakvo objašnjenje ne bi bilo u saglasnosti sa prethodnim rezultatom, kada smo sve periode posmatrali odvojeno. Verovatnije je da univerzalnost ne postoji ni pre minimuma, ali se intervali kojima



Slika 5. Zavisnost $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ od $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$ za periode posle minimuma za svaki minimum pojedinačno

Figure 5. $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ as a function of $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$ for each of the periods after the minimum (a-d for 1-4, respectively)



Slika 6. Zavisnost $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ od $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$, za periode pre i posle kriza, posmatrajući sve intervale pre minimuma kao jedan skup i sve intervale posle minimuma kao drugi skup podataka. Prikazane su i prave koje najbolje odgovaraju datim tačkama.

Figure 6. $\ln\left|\frac{\bar{d}_t - \bar{d}_{t_C}}{\bar{d}_{t_C}}\right|$ as a function of $\ln\left|\frac{t - t_C}{t_C}\right|$ for all the periods before the minimums as one data set (a), and all those after the minimums as another (b). The line shown was obtained by linear regression for the given data.

pripada parametar β manje međusobno razlikuju od odgovarajućih intervala za periode posle minimuma, dakle u ovom pogledu ponašanje finansijskih tržišta odstupa od ponašanja fizičkih sistema, tj. ne postoji univerzalno β, već je vrednost β različita za svaku krizu.

Tabela 2. Intervali kojima pripada β za period pre i posle kriza, koji su dobijeni posmatranjem svih perioda pre kriza kao jedan skup podataka i svih perioda posle kriza kao drugi. Prikazan je i koeficijent determinacije R^2, koji predstavlja kvalitet fita.

	β	R^2
Periodi pre kriza zajedno	[1.2295, 1.3739]	0.7627
Periodi posle kriza zajedno	[0.3331, 0.5089]	0.1922

I pored činjenice da se ne uočava univerzalnost, u periodu kriza ipak važi zakon skaliranja. Međutim, oblik tog zakona je takav, da u njemu figurišu $\bar{d}_{t_C}$ i t_C, što su veličine čije vrednosti postaju poznate tek kad srednje euklidsko rastojanje dostigne lokalni minimum, pa bismo, ako primetimo da važi zakon skaliranja, mogli da tvrdimo da je sistem ušao u krizu tek pošto je tržište krenulo da se oporavlja od krize, tj. pošto je rastojanje dostiglo minimum, što očigledno nije od velike koristi. Zato smo ispitali da li zakon skaliranja važi i ukoliko nisu poznate tačke u samoj okolini minimuma, tj. ukoliko su poznate samo tačke na početku svakog intervala pre krize. Konkretno, izbacili smo podatke o svim vrednostima srednjeg euklidskog rastojanja, koji su dobijeni do 15 dana pre minimuma i do 15 dana pre kraja krize.

Intervale nismo mogli da smanjujemo dalje, zato što su neki od vremenskih intervala koje smo uzimali bili oko 30 dana, pa ne bismo imali dovoljno podataka. Dobijeni rezutati u ovom slučaju pokazuju slično ponašanje kao i pre skraćivanja intervala.

Prilikom posmatranja svih intervala zajedno, kao jedan skup podataka, dobijeno je, da je koeficijent determinacije pre kriza i u ovom slučaju znatno viši nego posle, tačnije dobijeno je pre kriza $R^2 = 0.6229$, dok je posle kriza dobijeno $R^2 = 0.1833$.

Dobijene vrednosti za pojedinačno gledane intervale pre minimuma date su u tabeli 3. Vidimo da su vrednosti koeficijenta determinacije dosta visoke, što potvrđuje našu pretpostavku da zakon skaliranja važi, i ukoliko nisu uzeti u obzir podaci o ponašanju finansijskog tržišta u samoj okolini minimuma.

Tabela 3. Vrednosti koeficijenta determinacije R^2 za periode pre svakog minimuma, dobijenih bez podataka o ponašanju tržišta do 15 dana pre samog minimuma

	Prvi minimum	Drugi minimum	Treći minimum	Četvrti minimum
R^2	0.8446	0.8965	0.5365	0.8081

Treba još i pokazati da van perioda krize, zakon skaliranja ne važi. Uzeti su proizvoljni intervali van posmatranih, dužine (u danima) 30 (8. septembar 2009.-20. oktobar 2009.), 50 (31. oktobar 2001.-8. januar 2002.), 80 (17. januar 2006.-9. maj 2006.), 100 (23. novembar 2004.-12. april 2005.) i 150 (30. jun 2009.-26. januar 2010.) dana, za koje je dobijeno $R^2 < 0.3$, što je mnogo manje od vrednosti koje su dobijene za interval u blizini lokalnih minimuma.

Ovo znači da, primenjujući ovaj postupak, možemo unapred da utvrdimo da li postoji trend u ponašanju srednjeg euklidskog rastojanja koji je specifičan za krize, tj. ako znamo da ono opada za podatke koje imamo za neki interval vremena, i za taj period dobijamo da je koeficijent determinacije za zakon skaliranja blizu 1, možemo sa velikom pouzdanošću da kažemo da će u nekom narednom trenutku doći do krize, tj. da nije u pitanju kratkotrajna fluktuacija metrike, već da će se srednje euklidsko rastojanje i dalje smanjivati. Bilo bi korisno kad bismo mogli unapred da odredimo i tačan trenutak minimuma, ali je to nemoguće zaključiti, samo na osnovu oblika zakonitosti.

Zaključak

Ispitano je da li zakon skaliranja, koji karakteriše kritične tačke faznih prelaza fizičkih sistema, važi u nekom obliku i za finansijska tržišta. Korišćeno je srednje euklidsko rastojanje prinosa akcija parova kompanija, kao funkcija kojom se može prikazati stanje tržišta. Analizirani su intervali u blizini lokalnih minimuma srednjeg euklidskog rastojanja, koji približno odgovaraju periodima kriza, i za te intervale je ispitano u kojoj meri važi dati zakon.

Dobijeno je da zakon skaliranja važi za posmatrane intervale u periodima krize, dok van njih ne važi u opštem slučaju. Utvrđeno je da se može unapred odrediti da li će doći do krize, sa relativno velikom pouzdanošću, ali ne i tačan trenutak ulaska u krizni režim.

Dobijeni rezultati bi se mogli poboljšati proširenjem perioda vremena za koji smo analizirali podatke o cenama akcija kompanija iz posmatranog uzorka (da bismo obuhvatili veći broj kriza) i proširenjem skupa kompanija koje predstavljaju posmatrani uzorak. Bilo bi interesantno ispitati da li se može napraviti klasfikacija kriza u zavisnosti od vrednosti β, tj. parametra koji figuriše u datoj zavisnosti.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se našem mentoru, docentu dr Milošu Božoviću, i Stevanu Radanoviću, saradniku na programu fizike, na idejama i pomoći oko realizacije rada.

Literatura

Fenn D., Porter M., Williams S., Mcdonald M. Johnson N., Jones N. 2011. Temporal evolution of financial-market correlations. *Physical Review E*, **84** (2): 026109.

Longin F., Solnik B. 1999. *Correlation structure of international equity markets during extremely volatile periods*. Dostupno na SSRN 147848.

Mizuno T., Takayasu H., Takayasu M. 2006. Correlation networks among currencies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **364**: 336.

Mukherjee I., Sarkar A. 2011. Complexity, Financial Markets and their Scaling Laws. *DEGIT Conference Papers*, c016_008: 1-17.

Sandoval L. Jr. 2012. A Map of the Brazilian Stock Market. *Advances in Complex Systems 2*, **15** (4): 125042.

Sandoval L. Jr., Franca I. 2012. Correlation of financial markets in times of crisis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **391** (1): 187.

Stanley H. 1971. *Introduction to Phase Transition.* Oxford: Oxford University Press

Vunjak N., Kovačević Lj. 2010. *Finansijska tržišta i berze*. Subotica: Ekonomski fakultet Subotica

Sara Bogojević and Marko Kabić

Analysis of Financial Crises Using Power Laws as a Basis for an Analogy Between Physical and Financial Systems

The aim of this paper is to determine whether power laws that apply to systems like fluids and ferromagnets near the critical point apply to the financial market in times of crises. Furthermore, we wanted to see whether the existence of such a law could provide an efficient method of predicting future crises. In order to do this, we used the average Euclidean distance of pairs of stock returns as a function of the state of the market. We concluded that the given power laws apply to this function in periods of crisis to a great extent. We analyzed the periods when the crisis had just begun, and was virtually undetectable so as to determine whether these results could have any practical application. It was concluded that, if the given power law applies to the available data, it can be said with relatively high accuracy that the market is going to collapse in the near future.