Tamara Stanković i Luka Bulatović

Problem poštanskih markica i problem vraćanja kusura

Tema ovog rada su problem poštanskih markica (Postage stamp problem) i problem vraćanja kusura (Coin change problem). Problem poštanske markice sastoji se u pronalaženju najvećeg broja koji se ne može predstaviti kao nenegativna linearna kombinacija elemenata datog skupa brojeva. Prikazani su rezultati dobijeni u ranijim radovima kada je broj elemenata tog datog skupa 2 i rešen slučaj kada su elementi tog skupa Fibonačijevi brojevi. Problem vraćanja kusura (Coin change problem) sastoji se u tome da se isplati neki novčani iznos u određenom novčanom sistemu i postavlja se pitanje koji je najmanji broj novčanica koji se za to može iskoristiti. Korišćena su dva pristupa pri rešavanju ovog problema, greedy i dinamički, i upoređeni su rezultati koji su dobijeni korišćenjem svakog od njih. Dobijeni rezultati primenjeni su na neke od novčanih sistema koji su se koristili tokom istorije i na neke savremene novčane sisteme.

Uvod

U ovom radu su predstavljeni problem poštanskih markica (Postage stamp problem) i problem vraćanja kusura (Coin change problem). Oba problema nastala su na osnovu svakodnevnih čovekovih poteškoća u optimizaciji izbora predmeta, koju nije uvek znao kako da reši na najbolji mogući način. Problem poštanskih markica sastoji se u tome da se pronađe najveći broj koji se ne može predstaviti kao nenegativna linearna kombinacija elemenata datog skupa brojeva. Prikazani su rezultati kada je broj elemenata tog datog skupa 2, kao i kada su elementi tog skupa povezani preko neke rekurentne formule (aritmetički, geometrijski, Fibonačijev niz). Problem vraćanja kusura se sastoji u tome da nađemo najmanji broj novčanica da bismo isplatili neki novčani iznos u određenom novčanom sistemu. Predstavljena su dva pristupa rešavanju ovog problema, greedy i dinamički, i upoređeni su rezultati koji su dobijeni korišćenjem svakog od njih. Pronađeni su novčani sistemi za koje se rezultati greedy i dinamičkog algoritma ne razlikuju. Takođe, prikazan je algoritam koji

Tamara Stanković (1995), Niš, Branka Krsmanovića 15/14, učenica 2. razreda Gimnazije „Svetozar Marković” u Nišu

Luka Bulatović (1995), Pančevo, Karađorđeva 2/33, učenik 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

pronalazi prvu razliku između ova dva metoda. Pokazano je još kako se konstruiše novčani sistem na osnovu traženog iznosa da razlika između greedy i dinamičkog rešenja bude najveća moguća. Na kraju, dobijeni rezultati su primenjeni na neke od novčanih sistema koji su se koristili tokom istorije i na neke savremene novčane sisteme.

Problem poštanskih markica

Problem poštanskih markica glasi: Ako imamo n poštanskih markica različitih vrednosti, koja je najveća cena pisma koja se korišćenjem tih markica ne može dobiti? On je uopštenje McNuggets problema, koji je tokom 80-tih godina prošlog veka bio veoma popularan. Henri Picciotto je ručao sa svojim sinom u McDonald's restoranu i primetio je da se piletina prodaje samo u pakovanjima od 6, 9 i 20 komada po pakovanju. Zapitao se koje sve količine piletine ne mogu da se dobiju korišćenjem ovih pakovanja. Došao je do zaključka da su to pakovanja veličine: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37, 43. Lako je dokazao da je 43 najveće takvo pakovanje.

Formalnija, matematička definicija problema, bila bi:

Definicija 1. (Problem poštanskih markica) Za dati prirodan broj n i pozitivne cele brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$, takve da je $\mathrm{nzd}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$, pronaći najveći ceo broj koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nenegativni celi brojevi. Taj broj obeležavaćemo sa $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Uslov da je $\mathrm{nzd}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$ je neophodan da bi definicija imala smisla. U protivnom, ako je $\mathrm{nzd}(a_1, a_2, \ldots a_n) = d > 1$, tada ni jedan broj koji nije deljiv sa d se ne može predstaviti na opisani način, pa ne postoji onda ni najveći broj koji ne može da se predstavi. Takođe, neophodno je da naglasimo da su koeficijenti u linearnoj kombinaciji nenegativnni brojevi, jer bi onda, uz uslov da je $\mathrm{nzd}(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$, svaki broj mogao da se predstavi kao ovakva linearna kombinacija. Ako svaki prirodan broj može da se prikaže kao linearna kombinacija brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (na primer, ako skup ima jedan element i taj element je jednak 1), onda je $g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = -1$.

Rešenje problema poštanskih markica za skup koji ima dva elementa

Do rešenja problema za slučaj $n = 2$ prvi je došao James Joseph Sylvester 1884. godine. Ovo je teorema koju je on dokazao:

Teorema 1. Neka su a i b uzajamno prosti brojevi. Tada broj $ab - a - b$ ne može biti prikazan u obliku $ax + by$, gde su x i y nenegativni celi brojevi, ali svaki ceo broj veći od $ab - a - b$ može.

Da bismo dokazali ovo tvrđenje, poslužićemo se lemom:

Lema 1. Neka su a i b pozitivni celi brojevi $a, b > 1$, za koje važi $\text{nzd}(a, b) = 1$. Tada postoje celi brojevi x i y takvi da je $ax + by = 1$, $0 < x < b$ i $y > -a$.

Dokaz leme: Iz Bezuove leme sledi da rešenje (x, y) postoji pošto su a i b uzajamno prosti brojevi. Znamo da rešenja Diofantove jednačine oblika $ax + by = c$ gde $a, b, c \in N$ i $a, b \neq 0$ imaju oblik:

$$x = x_0 + \frac{bm}{\text{nzd}(a,b)} \text{ i } y = y_0 - \frac{am}{\text{nzd}(a,b)}$$

za $m \in Z$, gde je (x_0, y_0) uređeni par rešenja.

Rešavajući ovu Diofantovu jednačinu, zaključujemo da sva rešenja imaju oblik $(x_0 + mb, y_0 - ma)$, jer je $\text{nzd}(a, b) = 1$, gde je (x_0, y_0) uređeni par rešenja i $m \in Z$. U suštini, mi možemo da izaberemo (x_0, y_0) tako da je x_0 najmanji ostatak po modulu b. Da bismo dokazali da je i $y > -a$, pretpostavićemo suprotno, tj. da važi $y \leq -a$. Onda bi važilo:

$$1 = ax + by \leq ax + ba = a(x - b) < 0$$

što je kontradikcija. Dakle, važi da je $y > -a$. Ostaje još samo da dokažemo da je $x \neq 0$. Pretpostavimo suprotno: da važi da je $x_0 = 0$. Onda bi sledilo da je $y_0 b = 1$, što je nemoguće, jer ta jednačina ne bi imala celobrojna rešenja, što je kontradikcija. Sada možemo da se vratimo na dokaz naše teoreme.

Dokaz teoreme: Prvo, želimo da dokažemo da jednačina:

$$ax + by = ab - a - b$$

nema nenegativnih celobrojnih rešenja. Pretpostavimo suprotno, da takva rešenja postoje, to jest da važi $ax + by = ab - a - b$, za neke nenegativne cele brojeve x i y. Posmatrajmo ovu jednačinu po modulu b: $ax \equiv_b -a$. Kako je $\text{nzd}(a, b) = 1$, deljenjem obe strane sa a dobijamo $x \equiv_b -1$, odakle, zbog $x \geq 0$ sledi $x \geq b - 1$. Potpuno analogno dobijamo $y \geq a - 1$. Prema tome:

$$ab - a - b = ax + by \geq a(b-1) + b(a-1) = 2ab - a - b >$$
$$> ab - a - b$$

što je kontradikcija. Ovim je prvi deo teoreme dokazan.

Dokažimo sada drugi deo teoreme. To ćemo uraditi korišćenjem matematičke indukcije. Kao bazu indukcije, dokazaćemo da se broj $ab - a - b + 1$ može predstaviti na ovaj način. Dalje ćemo dokazati da ako je moguće predstaviti broj N na opisan način, onda je moguće i broj $N + 1$ predstaviti na taj način, sa tim da važi da je $N > ab - a - b$.

Dokažimo, dakle, prvo bazu indukcije. Znamo da postoje celi brojevi x_0 i y_0 za koje je:

$$ax_0 + by_0 = 1 \tag{1}$$

Neka su x_0 i y_0 brojevi iz Leme 1. Iz Leme 1 možemo zaključiti da je $0 < x_0 \le b$, pa je onda $x_0 - b < 0$. Koristeći jednačinu (1) dobijamo:

$$ax_0 - a + by_0 + ab - b = ab - a - b + 1$$

$$a(x_0 - 1) + b(y_0 + a - 1) = ab - a - b + 1$$

Sada, pošto je $x_0 \in N$, to znači da je $x_0 > 0$, odnosno $x_0 \ge 1$, tako da možemo zaključiti da je $x_0 - 1 \ge 0$. Na taj način smo odredili znak prvog sabirka sa leve strane prethodne jednačine, jer je $a \in N$, pa od njega ne zavisi znak sabirka. Iz prethodne leme znamo da je $y_0 > -a$, pa onda možemo zaključiti da je $y_0 + a - 1 \ge 0$.

Posmatrajmo jednačinu $ax + by = N$ čija su rešenja $x, y \ge 0$ kao indukcijsku hipotezu. Dokazaćemo da se i broj $N + 1$ može predstaviti kao nenegativna linearna kombinacija brojeva a i b. Saberimo jednačine $ax + by = N$ i $ax_0 + by_0 = 1$. Na taj način dobićemo:

$$a(x + x_0) + b(y + y_0) = N + 1 \tag{2}$$

Po uslovu teoreme $x \ge 0$, kao i $x_0 \in N$. Dakle, prvi sabirak ove jednačine je veći od nule, jer je $a \in N$ i $x_0 + x > 0$. Posmatrajmo zato drugi sabirak. Pošto je $b \in N$, znak tog sabirka zavisi isključivo od znaka izraza $y_0 + y$. Razmatraćemo dva slučaja.

Prvo, ako je $y_0 + y \ge 0$, tada je $a(x + x_0) + b(y + y_0) = N + 1$ nenegativna linearna kombinacija a i b, što smo i želeli da dokažemo.

Ako je, sa druge strane, $y_0 + y < 0$, onda imamo:

$$ab - a - b + 1 < N + 1$$

$$ab - a - b + 1 - b(y_0 + y) < N + 1 - b(y_0 + y)$$

$$ab - a - b + 1 - b(y_0 + y) < a(x_0 + x)$$

Pošto je $a \ge 1$, možemo celu nejednačinu podeliti sa a, bez menjanja znaka:

$$b - 1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{a} - \frac{b}{a}(y_0 + y) < x_0 + x$$

$$b - 1 + \frac{1}{a} - \frac{b}{a}(y_0 + y + 1) < x_0 + x$$

Po pretpostavci je $y_0 + y < 0$, i odatle zaključujemo da je $y_0 + y + 1 \le 0$, pa pošto su $a, b \in N$, važi $\frac{b}{a}(y_0 + y + 1) \le 0$. Ako to uvrstimo u prethodnu nejednačinu, možemo zaključiti:

$$b - 1 + \frac{1}{a} < x_0 + x$$

što dalje znači da je $b \le x_0 + x$, odnosno $x_0 + x - b \ge 0$. Dokazali smo da je $0 \le y_0 + a - 1$. Pošto je $y \ge 0$, možemo zaključiti da je:

$$a + y_0 + y \ge 0$$

Ako se podsetimo jednačine (2) i dodamo i oduzmemo njenoj levoj strani ab, dobićemo:

$a(x_0 + x) - ab + b(y_0 + y) + ab = N + 1$

$a(x_0 + x - b) + b(y_0 + y + a) = N + 1$

Ovo je nenegativna linearna kombinacija a i b, pošto smo već dokazali da je $x_0 + x - b \geq 0$ i $a + y_0 + y \geq 0$. To je upravo ono što smo želeli da dokažemo.

Sylvester je takođe dokazao da broj brojeva koji ne mogu da se predstave kao nenegativna linearna kombinacija brojeva a i b jednak:

$$\mathrm{br}(a, b) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

Rešenje problema poštanskih markica za neke konkretne skupove

U opštem slučaju ne može se pronaći tačna formula za naš traženi broj za neki proizvoljan skup markica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Međutim, ako je skup markica izabran po nekom pravilu, moguće je odrediti rekurentnu formulu.

Ako je dat aritmetički niz $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+sd\}$, gde su a, d i s celi brojevi i $\mathrm{nzd}(a, d) = 1$, dokazano je da važi (Alfonsin 2005):

$$g(a, a+d, a+2d, \ldots, a+sd) = \left(\left\lceil \frac{a-2}{s} \right\rceil + 1\right) a + (d-1)(a-1) - 1$$

Ako je dat geometrijski niz $\{m^k, m^{k-1}n, m^{k-2}n^2, \ldots, n^k\}$, gde su m, n i k celi brojevi i $\mathrm{nzd}(m, n) = 1$, dokazano je da važi (Ong i Ponomarenko 2008):

$$g(m^k, m^{k-1}n, m^{k-2}n^2, \ldots, n^k) =$$
$$= n^{k-1}(mn - m - n) + \frac{m^2(n-1)(m^{k-1} - n^{k-1})}{m-n}$$

Ako su elementi skupa markica Fibonačijevi brojevi, možemo odrediti formulu uz pomoć koje ćemo izračunati traženi broj. Konkretno, dokazali smo da je $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Fibonačijevi brojevi, jednako sa $g(a_i, a_j)$, gde su a_i i a_j najmanji od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ako to dokažemo, problem je rešen, jer smo već ranije pokazali koja formula odgovara rešenju problema kada je skup markica dvočlan. Elementi Fibonačijevog niza su definisani preko rekurentne formule $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, gde važi da je $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$. Fibonačijev niz je: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, itd. Dakle, svaki član Fibonačijevog niza je linearna kombinacija prethodna dva. Možemo dokazati i opštije:

Lema 2. Neka je F_n n-ti član Fibonačijevog niza. On predstavlja nenegativnu lineranu kombinaciju $F_n = \alpha F_i + \beta F_j$, gde su F_i i F_j Fibonačijevi brojevi i važi da je $i < j < n$.

Dokaz: Lemu ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Kao bazu smatraćemo da $F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$ i $F_3 = F_1 + F_2 = F_0 + 2F_1 = 1 + 2 = 3$. Za indukcijsku hipotezu pretpostavimo da su brojevi F_{n-1} i F_n nenegativne linearne kombinacije brojeva F_i i F_j za $i < j < n - 1$, tj. da važi $F_{n-1} = \alpha_{n-1} F_i + \beta_{n-1} F_j$, gde je $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1} > 0$ i $F_n = \alpha_n F_i + \beta_n F_j$, gde je $\alpha_n, \beta_n > 0$. Ono što u indukcijskom koraku želimo da dokažemo je da je i broj F_{n+1} linearna kombinacija brojeva F_i i F_j. Znamo da je $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, pa možemo izvesti zaključak da je:

$$F_{n+1} = \alpha_{n-1} F_i + \beta_{n-1} F_j + \alpha_n F_i + \beta_n F_j = $$
$$= (\alpha_{n-1} + \alpha_n) F_i + (\beta_{n-1} + \beta_n) F_j$$

Pošto je $\alpha_{n-1}, \alpha_n > 0$, onda je i $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 0$. Analogno zaključujemo i da je $\beta_{n-1} + \beta_n > 0$, pa data jednakost predstavlja nenegativnu linearnu kombinaciju brojeva F_i i F_j. Ako je $i = n - 1$ i $j = n$, po definiciji Fibonačijevog niza važi da je $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, onda tvrđenje i u tom slučaju važi. Time je lema dokazana.

Ova lema pokazuje da se svaki Fibonačijev broj može predstaviti kao linearna kombinacija dva manja Fibonačijeva broja. Na taj način dodavanje novog, većeg elementa u skup markica neće promeniti dotadašnja dobijena rešenja i neće stvoriti nova. Tako da je $g(a_1, a_2, \ldots a_n) = g(a_i, a_j) = a_i a_j - a_i - a_j$, gde su $a_1, a_2, \ldots a_n$ Fibonačijevi brojevi, a a_i i a_j najmanji od njih.

Problem vraćanja kusura

Pre nego što pređemo na sam problem, daćemo sledeću definiciju:

Definicija 2. Novčani sistem je skup $S = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, gde su $a_1, a_2, \ldots a_n$ prirodni brojevi i $1 \in S$. Elementi ovog skupa nazivaju se apoenima. Nenegativan ceo broj x se može prikazati (isplatiti) u novčanom sistemu S ako postoje nenegativni celobrojni koeficijenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, za koje važi $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$.

Uslov $1 \in S$ je neophodan da bi se svaki novčani iznos mogao prikazati u datom novčanom sistemu.

Problem vraćanja kusura proizilazi iz jednostavnog svakodnevnog problema: Koji je najmanji broj novčanica koji možemo upotrebiti da bismo isplatili (zamenili) neki novčani iznos M?

Pri određivanju mnogih novčanih sistema koji se koriste u svetu, često nije obraćana pažnja na ovaj problem. Rađeno je istraživanje koje je kao uzorak imalo američki monetarni sistem. Rezultat je bio neočekivan: upotrebom apoena od 18 centi, umesto apoena od 20 centi, zamena novca bila bi za čak 17 procenata efikasnija. Tačnije, u opticaju bi bilo čak 5 biliona novčanica manje (Shallit 2003). To bi bila značajna ušteda, iako bi ljudima verovatno bilo teško da se naviknu na novu vrstu apoena.

Definicija 3. (Problem vraćanja kusura) Za dati novčani sistem S i dati nenegativni ceo broj x, odrediti, ako postoji, prikaz broja x u sistemu S, $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, za koji je zbir $x = \alpha_{11} + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ minimalan.

Ne postoji eksplicitna formula koja tačno određuje $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ u funkciji od x i S, ali postoji nekoliko algoritama za pronalaženje optimalnog ili dovoljno dobrog načina plaćanja. Mi ćemo prikazati dva osnovna: greedy i dinamičko programiranje. Dalje se u radu podrazumeva da se novčani sistem S sastoji od n novčanica (apoena) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji je sortiran opadajući ($a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$). Sa M ćemo označavati broj za koji tražimo (minimalni) prikaz u sistemu S.

Greedy metod

Greedy (eng. halapljiv) metod odabira novčanica se sastoji u tome da uvek biramo novčanicu najveće vrednosti koja je manja ili jednaka broju M koji treba da dobijemo. Ako je takva novčanica x, onda isti postupak primenjujemo za novčani iznos $M - x$ i tako dalje.

Za dati nenegativan ceo broj x, označimo sa $g(x)$ broj novčanica koje koristi greedy metod u prikazu broja x. Na osnovu prethodnog, važi rekurentna formula:

$$g(x) = g(x - a_j) + 1$$

gde je $a_j = \max_{a_i \leq x} a_i$.

Početna vrednost funkcije biće $g(0) = 0$ a za našu traženu vrednost $g(M)$. Pošto smo u definiciji novčanog sistema rekli da novčani sistem mora sadržati apoen vrednosti 1, uvek je moguće da se izvrši isplata, odnosno ova funkcija će uvek imati konkretno rešenje.

Algoritam za pronalaženje broja novčanica koje će biti upotrebljene korišćenjem greedy metoda: kao ulazne parametre ovog problema imamo m – broj koji želimo da dobijemo, n – ukupan broj novčanica i a – niz vrednosti na novčanicama, sortiran opadajući. Mi prolazimo kroz niz novčanica, počevši od najveće i proveravamo da li je trenutna novčanica $a[i]$ manja ili jednaka od m. Ako jeste, oduzmemo od m vrednost te novčanice koliko god puta možemo, dakle $[m/[i]]$ puta. Pri tome, proveravamo da li smo uspeli da dođemo do nule i tako dobijemo traženi broj. Složenost ovog algoritma je $O(n)$.

Međutim, greedy algoritam ne daje uvek optimalno rešenje. Na primer, za novčani sistem $\{1, 3, 4\}$ i iznos 6, greedy algoritam će dati rešenje 3 (uzeće jednu novčanicu vrednosti 4 i dve novčanice vrednosti 1), a optimalno rešenje bi bilo 2, ako se uzmu dve novčanice vrednosti 3. Zato je neophodno poboljšanje opisanog greedy algoritma.

Poboljšanje se ne odnosi na složenost prethodno otisanog greedy algoritma, jer je veće složenosti od njega, već na tačnost dobijenog rešenja. Sastoji se u tome da se u svakom koraku izbacuje iz novčanog sistema trenutno najveća novčanica i proverava se da li se bez nje postiže bolji rezultat nego kada smo i nju uključili. Ovakav pristup bi tačno rešio malopređašnji problem sa sistemom $\{1, 3, 4\}$ i novčanim iznosom 6.

Algoritam za pronalaženje broja novčanica koje će biti upotrebljene korišćenjem poboljšanog greedy metoda: kao ulazne parametre ovog problema imamo m – broj koji želimo da dobijemo, n – ukupan broj novčanica i a – niz vrednosti na novčanicama, sortiran opadajući. Mi pozivamo prethodno opisanu funkciju za greedy metod i upoređujemo da li se korišćenjem redukovanog novčanog sistema dobija bolji rezultat. Složenost ovog algoritma je $O(n^2)$.

Dinamičko programiranje

Ovaj problem se može svrstati u klasu problema koji se rešavaju uz pomoć dinamičkog programiranja. Dinamičko programiranje se sastoji u tome da problem rešimo svođenjem na potprobleme. Time postižemo da znatno smanjimo vreme izvršenja programa na račun dodatnog utroška memorije. Jedan od najpoznatijih problema dinamičkog programiranja je knapsack problem (problem ranca), čija je ovo modifikacija.

Problem ranca glasi: Dat je ranac zapremine C. Imamo niz od n vrsta predmeta, od kojih i-ta ima zapreminu $z[i]$ i vrednost $v[i]$. Od svake vrste imamo neograničen broj predmeta na raspolaganju. Naš cilj je da ranac napunimo što vrednijim predmetima, tako da ubacujući predmete ne premašimo zapreminu ranca. Kao rešenje želimo da dobijemo ukupnu vrednost predmeta u najoptimalnije napunjenom rancu. Primetimo da, ako je ranac napunjen na najoptimalniji način, on ne mora biti napunjen do vrha, kao i da optimalno napunjen ranac ne mora sadržati najvredniji predmet. Analizirajući problem, možemo primetiti sledeće: ako je poslednji izabrani predmet k, onda preostali predmeti predstavljaju optimalno popunjavanje ranca zapremine $C - z[k]$. Zato ćemo rešenje konstruisati na osnovu rešenja potproblema. Preciznije, rešavaćemo problem za svako $j \in [1\ldots C]$ i ta rešenja čuvaćemo u nizu $a[j]$. Važi da je $a[0] = 0$. U promenljivoj max čuvamo najveću vrednost koju možemo dobiti popunjavanjem ranca zapremine j i ona na početku ima vrednost max $= 0$. Za svaki predmet posmatramo prvo da li on može da stane u ranac zapremine j. Ako može, razmatraćemo da li se veća vrednost predmeta u rancu dobija ubacivanjem tog predmeta u ranac ili ubacivanjem nekog već razmatranog predmeta. Odnosno, ako je $a[j - z[i]] + +v[i] >$ max, ubacujemo i-ti predmet zapremine j, tj. max $= a[j - z[i]] + +v[i]$. Kada smo proverili sve predmete za ranac zapremine j, pitamo se da li je dobijeno bolje rešenje nego za ranac zapremine $j - 1$. Ako je max $> a[j - 1]$, onda je $a[j]$ = max, ako nije $a[j] = a[j-1]$. Naše traženo rešenje, najveću ukupnu vrednost predmeta u rancu, čuvamo u $a[C]$.

Matematički, dinamičko rešenje problema vraćanja kusura može se predstaviti kao funkcija $d(x)$ za koju važi:

$d(x) = 1 + \min_{a_j \le x} d(x - a_j)$

Početna vrednost funkcije je $d(0) = 0$, a za traženo M njena vrednost je $d(M)$. Dakle, biramo novčanicu a_j na osnovu optimalnog izbora svih prethodnih novčanica za novčani iznos $M - a_j$. Ono što je neophodno da napomenemo je da ovakav pristup rešavanju problema uvek daje najoptimalnije rešenje, za razliku od prethodno opisanog greedy algoritma.

Algoritam za pronalaženje broja novčanica koje će biti upotrebljene korišćenjem dinamičkog algoritma: za ulazne parametre ovog problema imamo m – broj koji želimo da dobijemo, n – ukupan broj novčanica i a – niz vrednosti na novčanicama, sortiran opadajući. Pokušavamo da problem svedemo na problem ranca. Pretpostavićemo da su vrednosti novčanica zapremine predmeta, a vrednosti predmeta međusobno jednake i iznose 1. Neophodno je uočiti jedinu razliku u odnosu na tipičan problem ranca: potrebno je da ranac potpuno napunimo, odnosno da optimalno izabrane novčanice u zbiru daju tačno traženu vrednost. Zato, pored niza $v[i]$, gde pamtimo najmanji broj upotrebljenih novčića za iznos i, pamtimo i niz $z[i]$ koji određuje da li se novčani iznos i može tačno dobiti.

Upoređivanje greedy i dinamičkog algoritma

Uporedimo sada rezulte koje smo dobili testiranjem ova dva algoritma na nekim primerima, odnosno broj novčanica koje se dobijaju kao rešenje greedy, poboljšanim greedy i dinamičkim metodom. Primenjujući greedy, poboljšani greedy (pgreedy) i dinamički algoritam na određeni novčani sistem za proizvoljno izbrano m dobili smo sledeće rezultate:

$A = \{1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$

m	24	38	107	337	572	2867
greedy	3	5	3	6	4	9
pgreedy	3	5	3	6	4	9
dinamičko	3	5	3	6	4	9

$B = \{5, 4, 2, 1\}$

m	8	101	133	225	488	1523
greedy	3	21	28	45	99	306
pgreedy	2	21	28	45	99	306
dinamičko	2	21	27	45	98	305

$C = \{20, 11, 1\}$

m	22	150	210	316	343	1681
greedy	3	17	20	21	20	85
pgreedy	2	17	20	21	20	85
dinamičko	2	12	15	19	19	85

Ovaj primer nam je praktično pokazao da dinamički i greedy pristup mogu ali i ne moraju da uvek daju isto rešenje. To još bolje pokazuje upoređenje prosečnog broja iskorišćenih novčića na određenom intervalu. Primenjujući greedy, poboljšani greedy i dinamički algoritam na određeni novčani sistem za m iz datog intervala, dobili smo sledeće rezultate:

$A = \{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000\}$

m	[1..100]	[1..250]	[1..500]	[1..750]	[1..1000]
greedy	3.41	3.91	4.60	4.70	5.10
pgreedy	3.41	3.91	4.60	4.70	5.10
dinamičko	3.41	3.91	4.60	4.70	5.10

$B = \{1, 2, 4, 5\}$

m	[1..10]	[1..50]	[1..100]	[1..200]	[1..500]
greedy	1.70	5.70	10.70	20.70	50.70
pgreedy	1.60	5.68	10.69	20.70	50.70
dinamičko	1.60	5.52	10.51	20.50	50.50

$C = \{20, 11, 1\}$

m	[1..25]	[1..50]	[1..100]	[1..250]	[1..500]
greedy	4.84	5.94	7.05	10.83	17.05
pgreedy	4.68	5.34	6.25	10.49	16.88
dinamičko	4.68	5.30	5.85	9.10	15.17

Možemo i praktično zaključiti da poboljšani greedy algoritam daje bolje rešenje od greedy algoritma, ali da dinamički algoritam jedini uvek daje najmanje, tj. najbolje rešenje.

Novčani sistemi za koje se rešenja ne razlikuju

Teorema 2. Ako novčani sistem ima n elemenata i definisan je kao $a_i = c^{i-1}$ za svaki ceo broj $c > 1$ (apoeni čine niz $1, c, c^2, \ldots, c^{n-1}$), tada greedy algoritam daje optimalno rešenje.

Dokaz: Pri definiciji problema rekli smo da tražimo linearnu kombinaciju apoena takvu da je rezultat tačno M. Koeficijente u linearnoj kombiniciji obeležićemo sa α_i, tako da je uz i-tu vrstu novčanice koeficijent α_i. Mora da važi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = M$. Broj novčića koji se dobija kao rešenje je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Primetimo da za svaki apoen $a_i < a_n$ mora da važi da je $a_i < c$, gde je c ceo broj koji daje optimalno rešenje. Ako tako nešto ne važi, imali bismo da je $a_i \geq c$, pa bismo mogli da zamenimo c novčića oblika $a_i = c^{i-1}$, što ukupno vredi $c \cdot c^{i-1} = c^i$, sa jednim novčićem oblika $a_{i+1} = c^i$, a to daje manji broj upotrebljenih novčića. Zahvaljujući tome što je $a_i < c$, možemo doneti sledeći zaključak: isplaćivanje nekog novčanog iznosa pomoću novčanog sistema $\{1, c, c^2, \ldots, c^{n-1}\}$ ekvivalentno je njegovom prikazivanju u brojnom sistemu sa osnovom c. Broj se u određenom brojnom sistemu prikazuje na jedinstven način, pa greedy i dinamički algoritam uvek daju isto rešenje.

Možemo dokazati da greedy i dinamički algoritam daju isto rešenje i za opštije odabran novčani sistem.

Teorema 3. Ako je dat novčani sistem od n elemenata $\{1, c, c^2, \ldots \ldots c^{n-1}\}$, gde za svako i važi da a_{i-1} deli a_i, greedy i dinamički algoritam daju isto rešenje.

Dokaz: Neka je dat novčani sistem $\{1, a_1, a_2, \ldots a_n\}$ i M vrednost koju želimo da predstavimo pomoću tog novčanog sistema. Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ koeficijenti uz novčanice $1, a_1, a_2, \ldots a_n$ u linearnoj kombinaciji koja se dobija primenom dinamičkog algoritma, a $y_0, y_1, \ldots, y_n$ koeficijenti uz iste novčanice u linearnoj kombinaciji koji se dobijaju primenom greedy algoritma. Važi da je:

$$M = x_0 + x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$$

$$M = y_0 + y_1 a_1 + \ldots + y_n a_n$$

Uočimo da je $x_0 < a_1$. U suprotnom bismo umesto novčića vrednosti 1, uzeli jedan novčić vrednosti a_1 što bi dalo optimalnije rešenje, a to je nemoguće jer smo pretpostavili da je $x_0, x_1, \ldots, x_n$ linearna kombinacija optimalnog rešenja. Analogno zaključujemo da je: $x_1 < \frac{a_2}{a_1}$, $x_2 < \frac{a_3}{a_2}, \ldots$, $x_{n-1} < \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Posmatrajmo i koeficijente u linearnoj kombinaciji greedy rešenja. Uočimo da je $y_1 < a_1$. U suprotnom bismo morali da a_1 novčića vrednosti 1 zamenimo jednim novčićem vrednosti a_1 jer greedy algoriram uvek uzima što više od najvećeg, a $a_1 > 1$. Analogno, zaključujemo da je: $y_1 < \frac{a_2}{a_1}, y_2 < \frac{a_3}{a_2}, \ldots, y_{n-1} < \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Jednakost $x_0 + x_1 a_1 + \ldots x_n a_n = y_0 + y_1 a_1 + \ldots y_n a_n$ se može transformisati kao:

$$x_0 + a_1 \left(x_1 + x_2 \frac{a_2}{a_1} + \ldots + x^n \frac{a_n}{a_1} \right) = y_0 + a_1 \left(y_1 + y_2 \frac{a_2}{a_1} + \ldots + y^n \frac{a_n}{a_1} \right)$$

Iz toga zaključujemo da je $x_0 \equiv_{a_1} y_0$. Kako je $0 \leq x_0 < a_1$ i $0 \leq y_0 < a_1$, sledi da je $x_0 = y_0$.

Neka je $M_1 = \frac{M - x_0}{a_1}$. Dobijamo:

$$M_1 = x_1 + x_2 \frac{a_2}{a_1} + \ldots + x^n \frac{a_n}{a_1} = y_1 + y_2 \frac{a_2}{a_1} + \ldots + y^n \frac{a_n}{a_1}$$

$$x_1 + \frac{a_2}{a_1} \left(x_2 + x_3 \frac{a_3}{a_2} + \ldots + x^n \frac{a_n}{a_2} \right) = y_1 + \frac{a_2}{a_1} \left(y_2 + y_3 \frac{a_3}{a_2} + \ldots + y^n \frac{a_n}{a_2} \right)$$

Na osnovu toga zaključujemo da je $x_1 \equiv_{\frac{a_2}{a_1}} y_1$. Već smo dokazali da je $x_1 < \frac{a_2}{a_1}$ i $y_1 < \frac{a_2}{a_1}$, pa na osnovu toga možemo zaključiti da je $x_1 = y_1$. Analogno dokazujemo i jednakost svih ostalih koeficijenata x_i i y_i u linearnim kombinacijama dinamičkog i greedy rešenja. To znači da se greedy i dinamičkim algoritmom dobijaju ista rešenja.

Pronalaženje najmanjeg broja za koji se rešenja razlikuju

Već smo videli da greedy i dinamički metod ne daju uvek isto rešenje i da u slučaju da im je rešenje različito dinamički metod daje manje rešenje. Sada je cilj da pronađemo najmanji broj za koji se greedy i dinamički metod razlikuju za određeni novčani sistem. Ne možemo odrediti tačnu formulu čijim izračunavanjem bismo dobili taj traženi broj, već moramo da proveravamo za svaki broj da li ova dva algoritma daju različito rešenje. Postavlja se pitanje do kog broja bi trebalo vršiti proveru. Upravo nam to određuje sledeća teorema:

Teorema 4. Neka je n dati prirodan broj i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$ novčani sistem. Takođe, neka je $d(x)$ broj novčanica koji dobijamo upotrebom dinamičkog algoritma za isplatu sume x, a $g(x)$ broj novčanica koji dobijamo upotrebom greedy algoritma za isplatu sume x. Ukoliko postoji prirodan broj M (koji zavisi od $a_1, a_2, \dots, a_n$) tada važi: ako je $g(x) = d(x)$ za svako $x \le M$, onda je $g(x) = d(x)$ za svako $x \in N$.

Dokaz: Da bismo dokazali ovu teoremu, dovoljno je da pronađemo neki konkretan broj M, za koji teorema važi. Dokazaćemo da $M = 2a_n$ zadovoljava ovaj uslov.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji broj x_0, takav da je x_0 minimalan broj za koji važi da je $g(x_0) > d(x_0)$ i $x_0 > M$. Već smo ranije definisali funkcije po kojima izračunavamo broj novčanica koji dobijemo kao rešenje korišćenjem greedy metoda i broj novčanica koji dobijemo kao rešenje korišćenjem dinamičkog metoda:

$g(x) = g(x - a_n) + 1$, gde je $a_j = \max_{a_i \le x} a_i$

$d(x) = 1 + \min_{a_j \le x} d(x_i - a_j)$

Po pretpostavci x_0 je najmanji broj za koji važi $g(x_0) > d(x_0)$. Takođe, važi da je:

$d(x_0) = 1 + d(x_0 - a_j)$

$g(x_0) = g(x_0 - a_n) + 1$

Iz toga zaključujemo da je $d(x_0 - a_j) < g(x_0 - a_n)$.

Ako pretpostavimo da je $j = n$, onda važi da je $g(x_0 - a_n) = d(x_0 - a_n)$, jer je $x_0 - a_n < x_0$, a to je kontradikcija u odnosu na prethodni zaključak. Dakle, važi da je $j \ne n$. Odalte možemo izvesti zaključak, koristeći činjenicu da je $M = 2a_n$:

$x_0 - a_j \ge x_0 - a_n - 1 > M - a_n - 1 > a_n$

Po pretpostavci znamo da važi $d(x_0 - a_j) = g(x_0 - a_j)$, a u prethodnom koraku smo dokazali da je $x_0 - a_j > a_n$, a imamo:

$$d(x_0 - a_j) = g(x_0 - a_j) = g(x_0 - a_j - a_n) + 1 = d(x_0 - a_j - a_n) + 1$$

odnosno,

$d(x_0 - a_j) = d(x_0 - a_j - a_n) + 1$

Sada, na osnovu toga, možemo izvesti sledeće zaključke:

$d(x_0 - a_n) \le d(x_0 - a_j - a_n) + 1 = d(x_0 - a_j)$

Iz prethodnih jednačina znamo da je $d(x_0 - a_j) < g(x_0 - a_n)$, pa važi $d(x_0 - a_n) < g(x_0 - a_n)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je x_0 najmanji broj za koji važi da je $g(x_0) > d(x_0)$. Dokazali smo da broj $M = 2a_n$ zadovoljava uslov teoreme.

Ova teorema nam je odredila granicu do koje je neophodno proveravati da li se greedy i dinamičko rešenje razlikuju – ako razlika nije pronađena, pretragu bi trebalo obustaviti za novčani iznos $2a_n$.

Određivanje razlike između greedy i dinamičkog rešenja

Pokazano je da se dinamičko i greedy rešenje ne razlikuju uvek za isti broj. Sada ćemo razmatrati za koji broj se oni najviše mogu razlikovati.

Teorema 5. Za svaki novčani sistem od n elemenata $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i nenegativan ceo broj x važi da je $g(x) - d(x) \leq a_n - 1$, gde je a_n najveći apoen.

Dokaz: Imamo novčani sistem od n elemenata $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i želimo da pomoću njega isplatimo novčani iznos M. Dinamički algoritam optimalno bira novčanice. Važi da je $d(M) \geq [M/a_n]$, gde je a_n najveća novčanica. Sa druge strane, greedy algoritam uvek uzima najveću novčanicu koliko god puta može, dakle $[M/a_n]$ puta, pa je preostali iznos sigurno manji od a_n. Da nije manji, iskoristili bismo još jednu novčanicu tipa a_n, a to ovde nije slučaj. Dakle, pošto je preostali iznos manji od a_n, broj novčanica je $g(M) < [M/a_n] + a_n$, tj. $g(M) \leq [M/a_n] + a_n - 1$. Dakle, došli smo do dva zaključka: $d(M) \geq [M/a_n]$ i $g(M) \leq [M/a_n] + a_n - 1$. Odavde možemo zaključiti da je maksimalna moguća razlika $g(M) - d(M) \leq a_n - 1$.

Razmotrimo sada sledeći problem: Dat je ceo broj M, iznos koji želimo da predstavimo pomoću novčanica. Cilj nam je da konstruišemo takav novčani sistem da je razlika greedy rešenja za M i dinamičkog rešenja za M bude najveća.

Lema 3. Neka je dat prirodan broj $n \geq 2$, novčani sistem $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i M nenegativan ceo broj. Tada je:

(a) $g(2M) \leq M$

(b) $g(2M + 1) \leq M$

Dokaz:

(a) Potrebno je dokazati da je $g(2M) \leq M$ za novčani sistem $\{a_1 a_2, \ldots, a_n\}$. Pretpostavićemo suprotno, da postoji M, za koje važi da je $g(2M) \geq M + 1$. Da bismo to dokazali, dovoljno je da pronađemo jedan primer za koji to tvrđenje važi. Pošto rešenje treba da bude što veće, a greedy algoritam uvek bira najveći mogući apoen, i novčani sistem ima bar tri apoena, najveći apoen mora biti veći ili jednak od 3. Imamo jednačinu:

$$2M = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \tag{3}$$

Razmatrajmo tri moguća slučaja deljivosti broja M:

Ako je $M = 3k$, tada greedy algoritam daje rešenje koje je manje ili jednako od slučaja kad koristi samo apoene vrednosti 3. Na osnovu toga možemo zaključiti da je $g(2M) \leq \frac{2M}{3}$. Nejednačina $\frac{2M}{3} \geq M+1$ nema nijedno prirodno rešenje. Ako je $M = 3k+1$, tada je za broj iskorišćenih apoena vrednosti 3 važi:

$$\alpha_i \leq \left[\frac{2M}{3}\right] = \left[\frac{2(3k+1)}{3}\right] = 2k = \frac{2(M-1)}{3}$$

Koristeći jednačinu (4), dobijamo da je:

$$g(2M) \leq \frac{2M-1}{3} + 1 = \frac{2M+1}{3}$$

Nejednačina $\frac{2M+1}{3} \geq M+1$ nema prirodnih rešenja. Na kraju, ako je $M = 3k+2$, tada za broj iskorišćenih apoena vrednosti 3 važi da je:

$$\alpha_i \leq \left[\frac{2M}{3}\right] = \left[\frac{2(3k+2)}{3}\right] = 2k+1 = \frac{2(M-1)}{3}$$

Iz jednačine (3) dobijamo:

$$g(2M) \leq \frac{2M-1}{3} + 1 = \frac{2M+1}{3}.$$

Nejednačina $\frac{2M+1}{3} \geq M+1$ nema prirodnih rešenja.

Ovime smo dokazali da ne može biti $g(2M) \geq M+1$, tj. da je $g(2M) \leq M$.

(b) U drugom slučaju jednačinu (3) rešavamo na potpuno analogan način kao u prethodnom slučaju i dolazimo do zaključka da je:

$g(2M+1) \leq M$

Sada možemo konstruisati sistem. Razmatraćemo tri moguća slučaja:

1. Ako novčani sistem ima $n=1$ element, greedy i dinamički algoritam imaju isto rešenje, jer biraju taj apoen.

2. Ako je novčani sistem oblika $\{1, a_1\}$, greedy i dinamički algoritam imaju isto rešenje.

3. Ako novčani sistem ima $n > 2$ elemenata, imamo sledeću diskusiju. U slučaju da postoji apoen vrednosti M, greedy i dinamički algoritam će imati isto rešenje (uzeće samo taj element). Zato ćemo pretpostaviti da su svi apoeni manji od M. Kako da konstruišemo sistem u takvom slučaju, govori nam sledeća teorema:

Teorema 6. Novčani sistem za koji važi da je razlika između greedy i dinamičkog rešenja najveća moguća za novčani iznos oblika $2M$ je $\{1, M, M+1\}$, a za iznos oblika $2M+1$ je $\{1, M, M+2\}$.

Dokaz: Zanima nas, prvo, koja će rešenja dati dinamički algoritam za novčani iznos $2M$, odnosno $2M+1$. U prvom slučaju razmatramo rešenje za novčani iznos $2M$. U slučaju da se u novčanom sistemu nalazi apoen vrednosti M, dinamički algoritam će uvek imati rešenje $d(2M) = 2$ (jednostavno će dva puta uzeti novčanicu vrednosti M). Onda, u opštem slučaju možemo zaključiti da je $d(2M) \geq 2$, za svaki novčani sistem. U drugom slučaju posmatraćemo novčani iznos $2M + 1$. U slučaju da se u novčanom sistemu nalazi apoen vrednosti M, dinamički algoritam će uvek imati rešenje $d(2M + 1) = 3$ (jednostavno će dva puta uzeti novčanicu vrednosti M i jedanput novčanicu vrednosti 1). Onda, u opštem slučaju možemo zaključiti da je $d(2M + 1) \geq 3$, za svaki novčani sistem. Iz prethodne leme znamo da je $g(2M) \leq M$, a sada smo pokazali da je $d(2M) \geq 2$. To znači da razlika između greedy i dinamičkog rešenja ne može biti veća od $M - 2$, a novčani sistem koji ima baš tu razliku između greedy i dinamičkog rešenja je $\{1, M, M + 1\}$. Takođe, iz prethodne leme znamo da je $g(2M + 1) \leq M$ i pokazali smo da je $d(2M) \geq 3$. Tako zaključujemo da najveća razlika ne može biti veća od $M - 3$, a baš tu razliku zadovoljava novčani sistem $\{1, M, M + 2\}$.

Primena algoritma na nekim novčanim sistemima

Feničani su još u 10. veku pre nove ere osmislili novac kao sredstvo plaćanja. Od tada postojalo je mnogo različitih novčanih sistema, koji su se, sa više ili manje uspeha, koristili u svetu. Primenjujući naš algoritam za upoređivanje greedy i dinamičkog rešenja na neke od poznatijih istorijskih novčanih sistema, dobili smo rezultate date u tabeli 1.

Tabela 1. Prvo pojavljivanje razlike između greedy i dinamičkog rešenja za istorijske novčane sisteme

Država	Period	Novčani sistem	Prva razlika
Grčka (Atina)	V vek p. n. e.	{3600, 600, 6, 1}	nema razlike
Rim	rana republika	{120, 40, 24, 20, 10, 4, 1}	30
Rim	republika (III vek)	{120, 60, 36, 24, 12, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1}	19
Rim	Avgustovo doba	{800, 400, 200, 100, 50, 25, 2, 1}	nema razlike
Rim	Dioklecija-novo doba	{1000, 500, 200, 40, 10, 1}	600
Rim	kasno carstvo	{720, 180, 24, 12, 1}	nema razlike
Vizantija	X vek	{16800, 3360, 1680, 840, 420, 1}	12874
Engleska	XVIII vek	{960, 252, 240, 60, 12, 1}	300
Poljska	XVIII vek	{15, 10, 7, 6, 3, 1}	9
Nigerija	1958-1973	{20, 12, 1}	24

Ovo je još jedan od primera koji pokazuju da je matematička nauka nastala na osnovu viševekovnog iskustva i da je rešavanje svakodnevnih problema podstaklo njen razvoj.

Primenjujući naš algoritam na neke od savremenih novčanih sistema koji su i dalje u upotrebi, dobili smo sledeće rezultate (tabela 2):

Tabela 2. Prvo pojavljivanje razlike između greedy i dinamičkog rešenja za savremene novčane sisteme

Država	Valuta	Novčani sistem	Prva razlika
EU	euro	{500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1}	nema razlike
SAD	dolar	{100, 50, 20, 10, 5, 2, 1}	nema razlike
Rusija	rublja	{5000, 1000, 500, 100, 50, 10, 5, 2, 1}	nema razlike
Kina	juan	{100, 50, 20, 10, 5, 2, 1}	nema razlike
Tadžikistan	somoni	{500, 200, 100, 50, 25, 20, 10, 5, 3, 1}	40
Madagaskar	ariari	{10000, 5000, 2000, 1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 4, 2, 1}	8
Srbija	dinar	{5000, 2000, 1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1}	nema razlike

Možemo zaključiti da za većinu valuta koje se danas koriste u svetu razlike između greedy i dinamičkog pristupa nema.

Literatura

Alfonsin J. R. 2005. *The Diophantine Frobenius Problem*. Oxford: Oxford University Press

Ong D. C., Ponomarenko V. 2008. The Frobenius Number of Geometric Sequences. *Integers: Electronic journal of Combinatorial Number Theory*, **8** (1): A33.

Shallit J. 2003. What this country needs is an 18¢ piece? *Mathematical Intelligence*, **25** (2): 20.

Stanimirović P., Stojković N., Petković M. 2007. *Matematičko programiranje*. Niš: Univerzitet u Nišu Prirodnomatematički fakultet

Tamara Stanković and Luka Bulatović

Postage Stamp Problem and Coin Change Problem

In this paper, the Postage stamp problem and the Coin change problem have been described. The Postage stamp problem is defined as finding the biggest integer that cannot be represented as a nonnegative linear combination of the elements of some set of integers. The results when that set has two elements have been shown and the case when elements of the set are Fibonacci numbers has been explained. The Coin change problem is defined like this: there is some amount of money that is to be exchanged using a certain monetary system. The question is: how to use as few coins as possible to make that exchange? Two different approaches to this problem have been used – the greedy and the dynamic algorithm, and the results have been compared. These algorithms have been applied on some monetary systems that were used in the past and on some modern monetary systems.