Ana-Marija Nedić, Maksim Lalić i Jovana Đorđić

Zmija u kutiji

Rad se zasniva na analizi otvorenog problema u teoriji grafova, problema „Zmija u kutiji", poznatijim pod nazivom „Snake in the Box" problem. U radu je data analiza dosadašnjih rezultata u više aspekata. U dosadašnjim istraživanjima, problem „Zmija u kutiji" je bio rešavan samo na hiperkocki. U ovom radu problem je proširen. Razvijena je ideja o primeni Grej koda u sistemima koji se ne zasnivaju na binarnom zapisivanju podataka, već nekim drugim vrstama n-arnog zapisivanja i njihovim kombinacijama. U radu su problemi „Zmija u kutiji" i „Ciklus u kutiji" primenjeni na n-tostranu piramidu, n-tostranu prizmu, oktaedar, dodekaedar, ikosaedar i Fibonačijeve kocke do sedme dimenzije, pri čemu su sva rešenja dokazana i izanalizirana za sve karakteristične slučajeve.

Definicija problema

Problem „Zmija u kutiji", koji se češće koristi i poznatiji je pod engleskim nazivom „Snake in the Box" problem, je problem traženja najdužeg puta kroz ivice hiperkocke. Tako dobijeni najduži put za određenu dimenziju hiperkocke naziva se „zmija". Pri građenju „zmije" važe sledeća pravila: "Glava zmije" je proizvoljno teme hiperkocke od koga se put, koji prolazi kroz ivice hiperkocke, počinje graditi. Pri građenju „zmije", kroz svako teme hiperkocke može se proći najviše jednom, i kad se jednom prođe kroz neko teme, onemogućeno je proći kroz sva njegova susedna temena. Poslednje teme iskorišćeno za konstrukciju „zmije", naziva se „rep zmije".

Ovako definisana „zmija" se može predstaviti kao povezan graf u kojem svako teme ima tačno po dva susedna temena koja pripadaju putu, a „glava" i „rep" u grafu imaju po tačno jednog suseda. U teoriji grafova taj problem spada u specijalan slučaj takozvanih „induced subgraph isomorphism" problema (Abbott i Katchalski 1988).

Cilj ovog rada je analiza dosadašnjih rezultata i generalizacija problema. Problem koji je do sada bio posmatran isključivo na hiperkockama, u radu je proširen i na n-tostranu piramidu, n-tostranu prizmu, oktaedar,

Ana-Marija Nedić (1993), Kucura, Novi šor 115a, učenica 3. razreda Gimnazije „Žarko Zrenjanin" u Vrbasu

Maksim Lalić (1994), Kać, Svetozara Miletića 4, učenik 2. razreda Vojne gimnazije u Beogradu

Jovana Đorđić (1993), Beograd, Majur (Šabac), Trgovačka 203, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

dodekaedar, ikosaedar i Fibonačijeve kocke. Problem je kompletno rešen na svim pomenutim objektima i Fibonačijevim kockama do sedme dimenzije. U radu je dokazano da su pronađena rešenja za svaki od razmatranih slučajeva maksimalna, i time i najoptimalnija moguća.

Formalna definicija problema

Neka je $G(V, E)$ prost graf, odnosno graf kod koga su dva čvora povezana najviše jednom granom. Potpun graf sa n čvorova, označen sa K_n, je graf u kom su svaka dva različita čvora povezana granom.

Vektorski proizvod dva grafa G_1 i G_2, označen kao $G = G_1 \times G_2$, je graf G, gde je $G = V_1 \times V_2$ skup čvorova i dva čvora (u_1, u_2) i (v_1, v_2) u G su povezana u G ako i samo ako je $u_1 = v_1$ i u_2 i v_2 su povezani u G_2 ili $u_2 = v_2$ i u_1 i v_1 su povezani u G_1.

N-dimenzionalna hiperkocka, označena sa Q_n, induktivno može biti definisana preko:

$Q_1 = K_2$,

$Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$.

Temena u Q_n mogu se predstaviti kao 2^n vektori binarnih cifara, svaki dužine n. Dva temena su povezana u Q_n ako se razlikuju u tačno jednoj vrednosti koordinate.

Put u grafu G je niz čvorova $v_0, v_1, \ldots, v_n$, u kom su čvorovi v_{i-1} i v_i $(1 \le i \le n)$ povezani. Takav put ima krajeve v_0 i v_n i dužinu n. Prost put je put u kom se čvorovi ne ponavljaju.

Definicija 1. „Zmija” u Q_n je najduži mogući prost put $v_0, v_1, \ldots, v_n$ u Q_n, tako da v_i i v_j nikad nisu povezani u Q_n kada se i i j razlikuju za više od 1.

Cikl u grafu G je niz čvorova $v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0$, u G, gde je v_0, v_1, …, v_n put i v_n i v_0 su povezani. Takav cikl ima dužinu $n+1$. Prost cikl je cikl v_0, v_1,…, v_n, v_0 tako da je $v_i \neq v_j$ ako je $i \neq j$.

Definicija 2. „Ciklus” je prost cikl $v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0$ u kom v_i i v_j nikad nisu povezani u Q_n kada se i i j razlikuju za više od 1.

Definicija 3. Grej kod je Hamiltonov put ili cikl na hiperkocki.

Analiza dosadašnjih rezultata

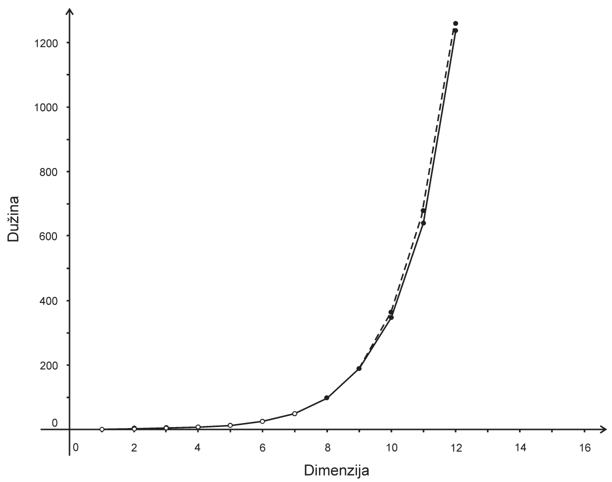
Problem „Zmija u kutiji” je postavljen 1958. godine od strane matematičara Vilijama Kauca i do danas nije napravljena generalizacija. U ovom radu analizirani su rezultati dobijeni zaključno sa 25. januarom 2010. godine (web 1). Problem je kompletno rešen za hiperkocke zaključno sa 7. dimenzijom (Harray *et al*. 1988), dok je za hiperkocke u intervalu od 8. do 12. dimenzije nađeno rešenje za koje se nije dokazalo da je maksimalno. Za više dimenzije nisu pronađena rešenja. Zbog toga što se do sada nije ustanovila nikakva zakonitost, maksimalna rešenja se rešavaju posebno za različite dimenzije i njihovi grafovi nemaju sličnosti, a prostor u kom se rešenja traže $O(n^{2^n})$ raste eksponencijalno. Do sada pronađeni rezultati zavisnosti maksimalne dužine zmije od dimenzije:

Dimenzija	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dužina	1	2	4	7	13	26	50	≥98	≥190	≥364	≥680	≥1260

Postoji i slično definisan problem nazvan „Ciklus u kutiji" (engl. „Coil in the Box"), koji se najčešće paralelno analizira sa problemom „Zmija u kutiji". Razlika između ova dva problema je u tome što je „Ciklus u kutiji" problem traženja najdužeg zatvorenog puta, puta čiji se početak i kraj nalaze u istom temenu hiperkocke. „Ciklus u kutiji", odnosno ciklus kroz ivice hiperkocke, u teoriji grafova je definisan kao zatvoreni graf u kome svako teme ima tačno dva susedna temena. Zbog nevelike razlike, oba ova problema su podjednako istražena (slika 1). Do sada pronđeni rezultati za problem „Ciklus u kutiji":

Dimenzija	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dužina	0	4	6	8	14	26	48	≥96	≥188	≥348	≥640	≥1238

N-dimenziona kocka (kocka dimenzije n) ima 2^n temena. Sa povećanjem broja temena, povećava se i broj kombinacija za građenje zmije, ali se kretanjem zablokira i veći broj polja. Analizom optimalnih zmija kroz dimenzije, dolazi se do zavisnosti koja pokazuje da je u odnosu na broj temena, učinak sve slabiji. Dosadašnji rezultati pokazuju da svaka dimenzija ima za 80-100% veću dužinu od prethodne.



Slika 1.
Grafik zavisnosti dužine „zmije" (isprekidana linija) i „ciklusa" (puna linija) od dimenzije

Figure 1.
Graph of the length of "snake" (dashed line) and "coil" (solid line) as a function of the dimension

Primećuje se da u početku „ciklus” ima veću dužinu nego „zmija”, jer se kod njega ne blokiraju polja kod „glave” i time se ostavlja veći broj temena za građenje puta, što je velika prednost kada postoji mali broj temena. Kako se broj dimenzije povećava, značaj tih temena pored „glave” je sve manji. Tada je „ciklus” ograničeniji u odnosu na „zmiju”, jer se mora završavati u temenu iz kog je krenuo, što ga ograničava. Zbog toga „zmija” u već malo višim dimenzijama počinje da raste brže od „ciklusa”. Funkcije rasta „zmije” i „ciklusa” se seku na šestoj dimenziji, kada su za oba dužine puta 26 mernih jedinica.

Zbog naglog povećanja broja temena, posle sedme dimenzije ne može se sa pouzdanjem govoriti o najvećoj dužini i dobijena je samo potencijalna najveća dužina. Optimalna strategija se sastoji od građenja što kompaktnijeg puta, da se između dva nesusedna temena nalazi što manji broj zablokiranih temena, ali uz vođenje računa da ostane na kraju što manje slobodnih temena do kojih je nemoguće dopreti.

Generalizacija problema na druge figure

Problem „Zmija u kutiji” u formulaciji je primenjen na hiperkocke zbog sličnosti Grej koda i hiperkocke. Broj kombinacija Grej kodova za dužinu n predstavlja se formulom 2^n, a broj temena hiperkocke za n-tu dimenziju se računa po formuli 2^n. U našem radu smo probleme „Zmija u kutiji” i „Ciklus u kutiji” primenili i na neke druge trodimenzionalne i višedimenzionalne figure. Rezultati koje smo dobili mogu se na isti način primeniti u n-narnim sistemima i sistemima koji se dobijaju njihovom kombinacijom, kao što se Grej kod primenjuje za ispravljanje grešaka u prenosu podataka koji se čuvaju primenom binarnih sistema.

U radu smo razmatrali primene problema na n-tostranu piramidu, n-tostranu prizmu, oktaedar, dodekaedar, ikosaedar i Fibonačijeve kocke do sedme dimenzije.

Problem primenjen na n-tougaonu prizmu

Problem „Zmija u kutiji” i „Ciklus u kutiji” smo postavili u prizmi sa n-tougaonom osnovom. Ona ima $3n$ stranica. Uočava se da se kretanjem kroz teme jedne od osnova, odgovarajuće teme druge osnove blokira. Formulisaćemo dve leme za prizmu u opštem slučaju, koje ćemo primeniti za rešenje problema traženja maksimalnog puta u n-tougaonoj prizmi.

Lema 1. Za što duži put ili cikl u prizmi, potrebno je što više puta proći kroz bočne ivice prizme, ne uključujući bočnu ivicu kod „glave” i predzadnjeg temena za „zmiju”, čija optimalnost zavisi od vrste prizme.

Dokaz: Treba uočiti da kod prizme zmija može da se kreće samo u jednom smeru, koji je određen prvim prelaskom preko jedne ivice bilo koje od osnovica prizme. Pretpostavimo da zmija neće uopšte prolaziti kroz bočne ivice n-tostrane prizme. Tada je najduži put koji bi mogla da obiđe $n-1$. Za cikl koji ne sadrži bočne ivice, rešenje bi bilo n. U slučaju da zmija prođe samo kroz jednu bočnu ivicu u nekom delu putanje (osim na „glavi" i predzadnjem temenu – što su karakteristični slučajevi koje ćemo kasnije analizirati), dužina putanje će se povećati za 1. Svakim novim prelazom kroz neku bočnu ivicu u nekom delu putanje (osim na „glavi" i predzadnjem temenu) dužina putanje će se uvek povećavati za po 1. Slično važi i za cikl. Time dobijamo da je za što veću dužinu zmije ili cikla najpoželjnije da se što češće prolazi kroz bočne ivice, što je i formulacija leme. Da li je optimalno prolaziti i kroz ivice pored „glave" i predzadnjeg temena zavisi od vrste prizme, tako da ćemo te slučajeve razmotriti za svaku vrstu prizme pojedinačno. □

Lema 2. Za što duži put ili cikl u prizmi, potrebno je prolaziti kroz svaku drugu bočnu ivicu i to uzastopno.

Dokaz: Označimo temena na jednoj osnovi prizme sa A_1, A_2, ..., A_n, a temena na drugoj osnovi sa B_1, B_2, ..., B_n. Ako put sadrži ivice $A_k A_{k+1}$ i $A_{k+1} A_{k+2}$, onda je teme B_{k+1} zablokirano i u građenju ovog puta neće biti moguć prolaz ivicom $A_{k+1}B_{k+1}$. Kako je na osnovu leme 1, strategija za građenje najdužeg puta ili cikla u tome da je što češće potrebno proći kroz bočne ivice, a prolazom kroz osnovnu ivicu na nekom m-tom mestu onemogućeno je proći kroz bočnu ivicu na istom tom mestu. Iz toga dobijamo da je za što duži put ili cikl u prizmi potrebno uzastopno prolaziti kroz bočne ivice.

Iako bi bilo logično da je optimalna strategija da je za što duži put ili cikl u prizmi, potrebno prolaziti upravo kroz svaku bočnu ivicu, to je onemogućeno zbok blokiranih polja pri kretanju. Zapravo, susedna polja koja se blokiraju pri nekom potezu, onemogućavaju prolaz kroz bilo koje dve uzastopne bočne ivice. Ako se načini korak $A_k B_k$ blokira se teme A_{k+1}, a zbog jednosmernosti u kretanju, sada se može načiniti samo korak $B_k B_{k+1}$. Kako je teme A_{k+1} blokirano, sledeći korak može biti jedino $B_{k+1}B_{k+2}$. Posle toga je moguće primeniti lemu 1 i načiniti korak $B_{k+2}A_{k+2}$ i tako dalje. Ovim kretanjem kroz bočnu ivicu se prolazi na svakom drugom mestu, pa se iz toga dobija potpuno tvrđenje leme 2. □

Ponovo označimo temena na jednoj osnovi prizme sa A_1, A_2, ..., A_n, a temena na drugoj osnovi sa B_1, B_2, ..., B_n i neka „glavu zmije" čini tačka A_1. U zavisnosti od toga da li bočna ivica prolazi na „glavi" ili ne, postoje dva načina kretanja:

1. Prvi korak je kretanje osnovnom ivicom, korak A_1A_2. Drugi korak je A_2A_3 i potom se kretanje nastavlja primenjujući lemu 2.
2. Prvi korak je kretanje bočnom ivicom, korak A_1B_1. Kretanje se nastavlja primenjujući lemu 2.

Koji od ta dva načina ćemo koristiti za traženje „zmije" i „ciklusa" u prizmi zavisi od vrste prizme. Da li ćemo sa predzadnjeg temena preći preko bočne ivice ili ne, takođe zavisi od vrste prizme, ali je taj korak određen, što će se videti u produžetku.

Prizme ćemo podeliti u zavisnosti od toga koji ostatak po modulu 4 daje broj stranica osnove u toj prizmi. Tako razlikujemo četiri vrste n-tostranih prizmi, kada je $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ i $n = 4k + 3$.

Problem „Zmija u kutiji" primenjen na n-tougaonu prizmu

1. n-tostrana prizma, $n = 4k$

Ovde je svejedno koji način kretanja koristimo (1 ili 2), uvek se dobije isti rezultat.

Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom. Kasnije ćemo pokazati da se ista (maksimalna) dužina „zmije" dobija kretanjem bilo načina 1 bilo načina 2. Uvećavajući k za po 1% dužina „zmije" će se povećavati za po 6. Broj 6 će biti period u povećanju dužine „zmije", pošto će se rep zmije nalaziti na istoj poziciji samo udaljen za 6 jedinica merenja od repa u prizmi sa $n = k - 1$.

Baza indukcije: Za $k = 1$ tvrđenje važi primenom oba načina kretanja.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrđenje važi za $k = m$, odnosno za prizmu sa osnovom $n = 4m$.

Indukcijski korak: Za $k = m + 1$, dobijamo prizmu sa osnovom $n = 4m + 4$, odakle lako vidimo nastavkom na zmiju za $n = 4m$ da nijedno teme neće ostati neiskorišćeno (svako teme će ili pripadati „zmiji" ili će biti zablokirano).

Sada treba da pokažemo da je svejedno koji od načina kretanja ćemo koristiti za pravljenje najduže zmije.

1. način kretanja: Imamo $n - 1$ stranica iskorišćenih po dvema osnovicama i $(n - 1)\mathrm{div}2$ stranica koje spajaju osnove, tako da je

$S(n) = n - 1 + (n - 1)\mathrm{div}2.$

Kako je $n = 4k$,

$$(n - 1)\mathrm{div}2 = (n - 2)\mathrm{div}2 = \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

i odavde se dobija da je:

$$S(n) = n + \frac{n}{2} - 2$$

2. način kretanja: Imamo $n - 2$ iskorišćenih stranica po dvema osnovicama i $\frac{n}{2}$ stranica koje spajaju osnove, tako da je:

$$S(n) = n + \frac{n}{2} - 2$$

Ovim se dobija da dužina „zmije" u ovom slučaju ne zavisi od toga da li za način kretanja biramo način 1 ili način 2.

Dužinu „zmije" možemo zapisati i u funkciji od k, što daje rešenje $S(4k) = 6k - 2$

2. n-tostrana prizma, $n = 4k + 1$

Ovde je svejedno koji način kretanja koristimo, pošto ako gledamo s jednog kraja „zmije", ona je dobijena prvim načinom kretanja, a ako „zmiju" posmatramo s drugog kraja, dobijamo zmiju iscrtanu načinom 2.

Dokaz je sličan kao i za slučaj $n = 4k$ i dobijamo da je:

$$S(n) = n - 2 + (n-1)\mathrm{div}2 = n + \frac{n-1}{2} - 2$$

Zapisano u funkciji od k, $S(4k+1) = 6k - 1$

3. n-tostrana prizma, $n = 4k + 2$

U ovoj vrsti prizme, koristeći 1. način kretanja ostaje nam jedno teme do kojeg ne možemo stići, a nije zablokirano, što se ne događa primenom 2. načina, u kom će nam put biti duži. Stoga ćemo ovde koristiti 2. način kretanja.

Dokaz je sličan kao i za slučajeve $n = 4k$ i $n = 4k + 1$. Dobija se da je:

$$S(n) = n - 2 + n\mathrm{div}2 = n + \frac{n}{2} - 2;\ S(4k+2) = 6k + 1..$$

4. n-tostrana prizma, $n = 4k + 3$

Ovo je takođe slučaj kod kojeg nije svejedno koji od načina kretanja koristimo. „Zmija" će biti duža korišćenjem prvog načina kretanja.

Dokaz je sličan kao i u prethodnim slučajevima, za $n = 4k$, $n = 4k + 1$ i $n = 4k + 2$. Dobija se da je:

$$S(n) = n - 1 + n\mathrm{div}2 = n + \frac{n-1}{2} - 1;\ S(4k+3) = 6k + 3.$$

Problem „Ciklus u kutiji" primenjen na n-tougaonu prizmu

Za „ciklus" će se u obe osnove zajedno načiniti ukupno n koraka, jer se teme A_n ne blokira pri prvom koraku A_1A_2 ili A_1B_1, dok će broj bočnih ivica u putu, na osnovu leme 2, biti $n$div2. Međutim, broj bočnih prelaza mora biti paran, kako bi se „zmija" na kraju našla na istoj osnovi sa koje je krenula, da bi se njena „glava" i „rep" mogli spojiti. Na ovaj način, dokazom sličnim kao i pri traženju „zmije", dobija se:

$C(4k) = 4k + (4k \text{ div} 2) = 6k$
$C(4k + 1) = 4k + 1 + ((4k + 1) \text{ div} 2) = 6k + 1$
$C(4k + 2) = 4k + 2 + ((4k + 2) \text{ div} 2) - 1 = 4k + 2 + 2k = 6k + 2$
$C(4k + 3) = 4k + 3 + ((4k + 3) \text{ div } 2) - 1 = 4k + 3 + 2k = 6k + 3$

Kompletno rešenje za "zmiju" i "ciklus" zapisano u funkciji od k je:

$S(4k) = 6k - 2$	$C(4k) = 6k$
$S(4k + 1) = 6k - 1$	$C(4k + 1) = 6k + 1$
$S(4k + 2) = 6k + 1$	$C(4k + 2) = 6k + 2$
$S(4k + 3) = 6k + 3$	$C(4k + 3) = 6k + 3$

Problem primenjen na n-tougaonu piramidu

Posmatraćemo trodimenizonalne n-tougaone piramide.

Ukoliko bismo kod „zmije" krenuli sa vrha piramide, koji je spojen sa svim ostalim temenima, ili do njega stigli u prvom koraku, automatski bi sebi zablokirali sva temena. Sa druge strane, čim se povuče prvi korak iz jednog temena osnove ka drugom, vrh piramide postaje zablokiran i prinuđeni smo da uvek povlačimo jedini mogući potez – da idemo u krug po ivicama osnovice. Za „zmiju", pravićemo korake dok sva temena osim zablokiranog n-tog temena i vrha piramide ne budu pripadala „zmiji", pa će ukupna dužina zmije za n-tougaonu osnovu biti $S(n) = n - 2$.

Za „ciklus", dužina će biti ista bilo da se kreće od vrha ka prvom temenu na osnovi i završava korakom sa $(n-1)$-og temena ka vrhu, bilo da se obiđe osnova piramide. U oba slučaja dužina „ciklusa" će biti $C(n) = n$.

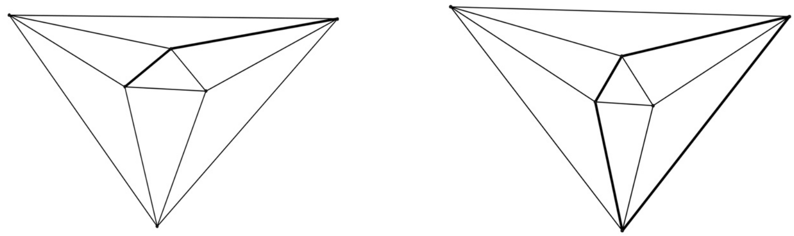
Problem primenjen na tetraedar u četvrtoj dimenziji

Tetraedar i u trećoj (specijalan slučaj rešenja za piramide), i u četvtoj dimenziji ima sva međusobno spojena temena. Stoga, čim se u „zmiji" napravi prvi korak, automatski su zablokirana sva ostala temena, te je dužina „zmije" uvek jedan za obe dimenzije. Za „ciklus", kad se napravi prvi korak, može da se ode na bilo koje sledeće teme, posle čega mora da se vrati na početno, tako da je dužina „ciklusa" uvek 3, i za treću i za četvrtu dimenziju.

Problem primenjen na oktaedar

Počev od oktaedra, analizirajući figure, analiziraćemo samo njihove grafove, pa ćemo umesto naziva za teme koristiti termin čvor, i umesto stranice, grana.

Graf oktaedra sačinjavaju 6 čvorova i 12 grana, od kojih po tačno 4 izlaze is svakog čvora. Kako je oktaedar pravilno telo, prvi korak se ne razlikuje u zavisnosti od izbora prvog čvora. Kako god dalje da biramo



Slika 2.
„Zmija” i „ciklus” u oktaedru

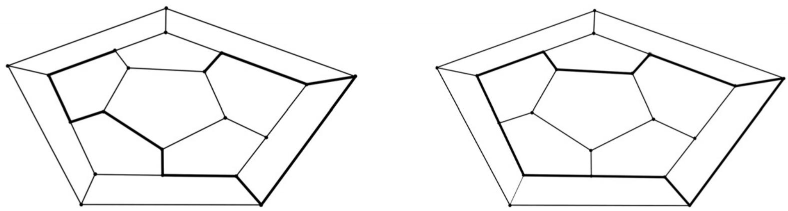
Figure 2.
“Snake” and “coil” in octahedron

čvor, za „zmiju” preostaje još samo jedan potez, pa je dužina puta za „zmiju” 2. Dužinu za „ciklus” dobijamo daljim razmatranjem slučaja za „zmiju” i ona iznosi 4. Skice rešenja su prikazane na slici 2.

Problem primenjen na dodekaedar

Graf dodekaedra se sastoji od 20 čvorova i 25 grana, gde tačno 3 grane izlaze iz svakog čvora.

Čvor za „glavu” i prvi korak se biraju proizvoljno, bez umanjenja opštosti. Pošto je u pitanju pravilno telo, pa je i njegov graf pravilan, treći čvor će odrediti samo smer kretanja „zmije”, što ne utiče na njenu dužinu. Za dalji izbor čvorova za „zmiju” postoje više mogućnosti, a analizom se dobija da je maksimalna dužina „zmije” 11.



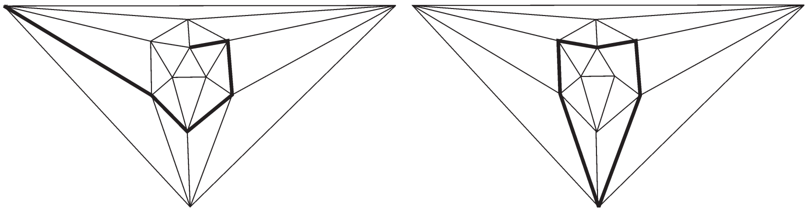
Slika 3.
„Zmija” i „ciklus” u dodekaedru

Figure 3.
“Snake” and “coil” in dodecahedron

Za građenje „ciklusa”, početak je isti kao i za građenje „zmije”, osim što treba uzeti u obzir i da čvorovi oko „glave” nisu blokirani, ali mora ostati i slobodan put do jednog od njih, kako bi se „rep zmije” poklopio sa njenom „glavom” i nastao „ciklus”, koji u ovom slučaju iznosi 12, kao što je prikazano na slici 3.

Problem primenjen na dodekaedar i ikosedar

Graf ikosaedra se sastoji od 12 čvorova i 30 grana, tako da iz svakog čvora izlazi tačno 5 grana. Zbog simetričnosti figure, postoji samo jedna mogućnost za povlačenje prvog koraka i posle toga ostaje ukupno 6 slobodnih čvorova, od kojih se u sledećem koraku može dospeti u dva. Ispitivanjem dolazimo do dužine 5 za „zmiju” i 6 za „ciklus” (slika 4).



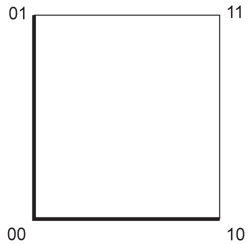
Slika 4.
„Zmija” i „ciklus” u ikosaedru

Figure 4.
“Snake” and “coil” in icosahedron

Problem primenjen na Fibonačijeve kocke

Definicija. Svako teme hiperkocke dimenzije d determiniše sa različitom kombinacijom cifara 0 ili 1 po svim koordinatama, tako da svako teme sadrži d cifara i ako su dva temena spojena stranicom, brojevi kojima se determinišu razlikuju se u tačno jednoj koordinati, odnosno na jednoj cifri. Postoji tačno 2^d temena u d-dimenzionoj hiperkocki i tačno 2^d kombinacija za determinaciju temena te hiperkocke. Kada se gradi kocka u višim dimenzijama, za svaku dimenziju se dodaje još po jedna koordinata. Fibonačijeva kocka se dobija kada se uklone sva temena koja u svojim koordinatama imaju dve uzastopne jedinice.

Fibonačijeve kocka u drugoj dimenziji dobija se uklanjanjem temena označenim sa 11, kao i stranicama koje vode do njega, što je prikazano na slici 5.

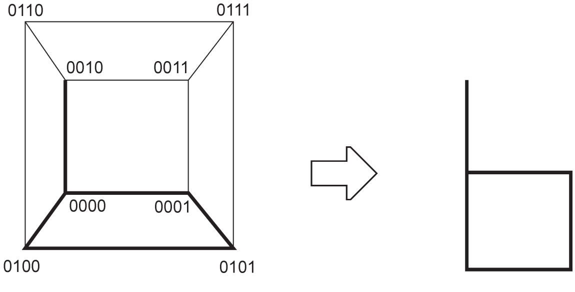


Slika 5.
Fibonačijeva kocka u drugoj dimenziji

Figure 5.
Fibonacci cube in second dimension

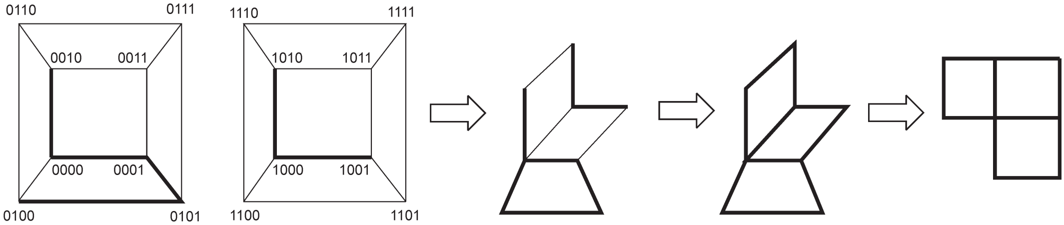
Graf Fibonačijeve kocke u trećoj dimenziji se dobija uklanjanjem temena 011, 110 i 111; postupak je prikazan na slici 6.

Fibonačijeva kocka u svakoj sledećoj dimenziji d može se izgraditi spajajući po deo iz $d-1$ i $d-2$ dimenzije, tako da će se grafovi tih



Slika 6.
Postupak dobijanja Fibonačijeve kocke u trećoj dimenziji

Figure 6.
The process of making Fibonacci cube in third dimension



Slika 7. Postupak dobijanja Fibonačijeve kocke u četvrtoj dimenziji

Figure 7. The process of making Fibonacci cube in forth dimension

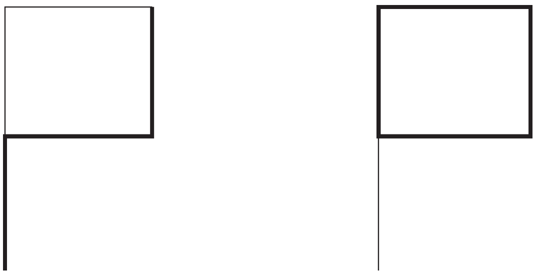
delova povezati u temenima u kojima se njihove koordinate razlikuju za samo jednu koordinatu (slika 7).

Problem primenjen na Fibonačijevu kocku u drugoj dimenziji

Ovde su rešenja problema „Zmija u kutiji” i „Ciklus u kutiji” trivijalna. Dužina „zmije” je 2, a „ciklus” se ni ne može izgraditi, pa je njegova dužina 0.

Problem primenjen na Fibonačijevu kocku u trećoj dimenziji

Za „zmiju” je logično da počne iz čvora koji ima samo jednog suseda i da napravi dužinu 3, što je i najduža moguća. Međutim, moguć je i obrnut put, kao i u bilo kojoj drugoj „zmiji” ili „ciklusu”. Za „ciklus” jedinstveno moguće rešenje je 4. Skice rešenja su prikazane na slici 8.

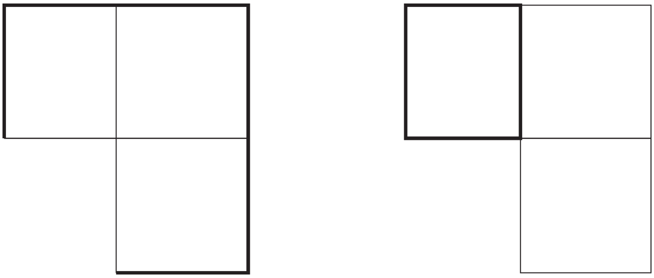


Slika 8. „Zmija” i „ciklus” u Fibonačijevoj kocki u trećoj dimenziji

Figure 8. “Snake” and “coil” in Fibonacci cube in third dimension

Problem primenjen na Fibonačijevu kocku u četvrtoj dimenziji

Kako god da načinimo prvi potez u „zmiji”, čvor koji jedini ima četiri suseda će biti ili iskorišćen, ili zablokiran. Kada se taj čvor iskoristi u



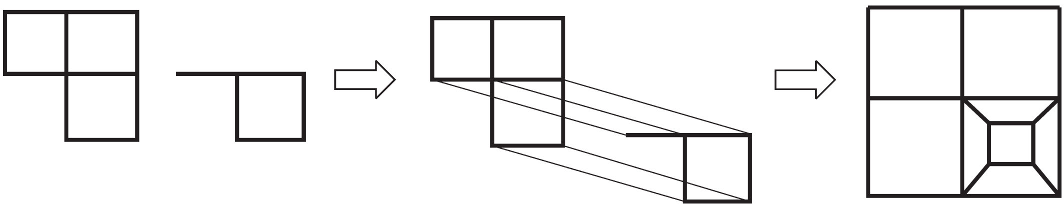
Slika 9. „Zmija” i „ciklus” u Fibonačijevoj kocki u četvrtoj dimenziji

Figure 9. “Snake” and “coil” in Fibonacci cube in forth dimension

prvom potezu, kako god da se načini sledeći korak, više od jednog temena biće blokirano. S druge strane, ako se krene od jednog od dva čvora koji imaju po tačno dva suseda i u građenju puta ne iskoristi čvor sa četiri suseda, to će biti i jedini zablokirani čvor, te je maksimalna dužina „zmije” 6. „Ciklus” se može izgraditi na više načina, ali upravo zbog čvora sa četiri suseda, jedino rešenje ujedno je i maksimalno i iznosi 4. Oba rešenja, za „zmiju” i „ciklus”, prikazana su na slici 9.

Problem primenjen na Fibonačijevu kocku u petoj dimenziji

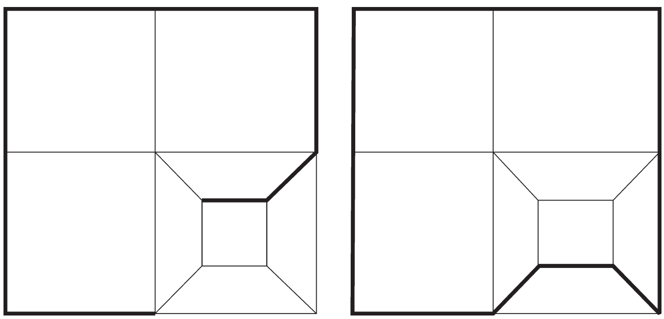
Graf Fibonačijeve kocke u petoj dimenziji dobija se odgovarajućom kombinacijom grafova Fibonačijevih kocki u trećoj i četvrtoj dimenziji (slika 10).



Slika 10. Postupak dobijanja Fibonačijeve kocke u petoj dimenziji

Figure 10. The process of making a Fibonacci cube in fifth dimension

Slično kao u prethodnoj dimenziji Fibonačijevih kocki, strategija za pronalaženje najdužeg puta se sastoji u obilaženju čvora iz kog izviru, u ovom slučaju, pet grana. Tako se za „zmiju” dobija maksimalna dužina 8, a za „ciklus” 10, što se može videti na slici 11.

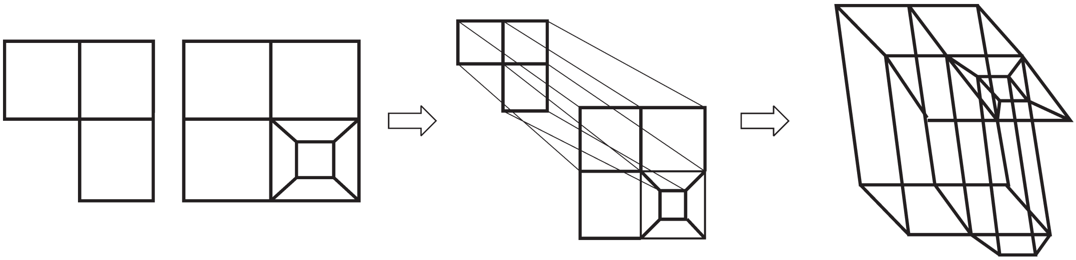


Slika 11. „Zmija” i „ciklus” u Fibonačijevoj kocki u petoj dimenziji

Figure 11. “Snake” and “coil” in Fibonacci cube in fifth dimension

Problem primenjen na Fibonačijevu kocku u šestoj dimenziji

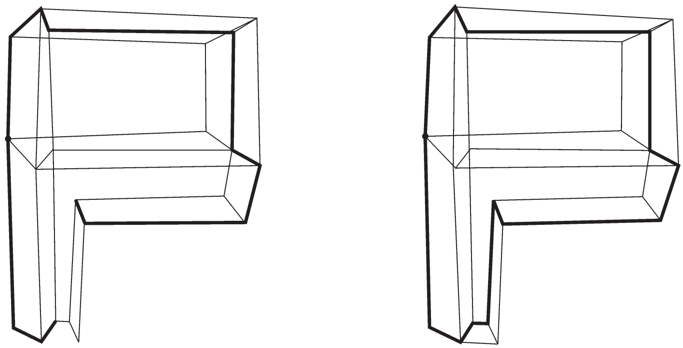
Na navedeni način dobijamo i graf Fibonačijeve kocke u šestoj dimenziji (slika 12).



Slika 12. Postupak dobijanja Fibonačijeve kocke u šestoj dimenziji

Figure 12. The process of making a Fibonacci cube in sixth dimension

S obzirom da postoji jedan čvor koji ima šest susednih čvorova, način na koji ćemo graditi zmiju je sličan kao u prethodnim slučajevima. Detaljnom analizom dobijaju se rešenja 12 za „zmiju” i 14 za „ciklus”, kako je prikazano na slici 13.



Slika 13. „Zmija” i „ciklus” u Fibonačijevoj kocki u šestoj dimenziji

Figure 13. “Snake” and “coil” in Fibonacci cube in sixth dimension

Primena rezultata

Pod Grej kodovima se podrazumeva binarni numerički sistem, gde se dva uzastopna broja u njemu razlikuju za tačno jedan bit, odnosno jednu cifru.

Jedna od današnjih najvažnijih namena Grej koda je njegova primena u modernim digitalnim komunikacijama, u takozvanom ispravljanju grešaka. Podaci se prebacuju tako što se pakuju u simbole koji sadrže četiri ili više bita, tako da u se nizu dva susedna simbola razlikuju za tačno jedan bit. Prilikom transakcije podataka može doći do neke greške, odnosno do gubljenja ili zamene nekog broja. Metoda koja se zove metoda ispravljanja grešaka, omogućava da se proveri da li je poruka autentično prenesena, bez potrebe da se upoređuje sa originalom.

Problem „Zmija u kutiji” je Grej kod primenjen na hiperkocke. Ako se temena hiperkocke označe odgovarajućim Grej kodovima, rešenje problema leži u traženju najdužeg mogućeg niza uzastopnih kodova za određenu dimenziju. Dobijeni niz Grej kodova će imati mogućnost da uklanja jednobitne greške, a njegova efektivnost će biti srazmerna njegovoj dužini, što objašnjava važnost zašto je potrebno naći najdužu moguću „zmiju".

Temena koja bi se pojavila u rešenju problema „Zmija u kutiji" ili „Ciklus u kutiji" u različitim dimenzijama mogu se koristiti kao Grej kodovi odgovarajućih dužina, koji imaju sposobnost ispravljanja jednobitnih grešaka. Takvi kodovi imaju primenu u koding teoriji, električnom inžinjeringu i u mrežnim topologijama.

Kako se u digitalnim komunikacijama trenutno primarno i daleko najviše koriste binarni sistemi, gde se broj kombinacija Grej kodova za dužinu n predstavlja formulom 2^n, jasno je zašto se problem „Zmija u kutiji" i „Ciklus u kutiji" primenio na hiperkocke, čiji se broj temena za n-tu dimenziju računa po formuli 2^n. Izraziti razvoj tehnologije, pored binarnog sistema koji se trenutno koristi, otvara mogućnost korišćenju i drugih vrsta sistema u skladištenju podataka. U našem radu smo probleme „Zmija u kutiji" i „Ciklus u kutiji" primenili i na neke druge trodimenzionalne i višedimenzionalne figure. Rezultati koje smo dobili mogu se primeniti za ispravljanje grešaka u prenosu podataka, koji se čuvaju primenom različitih n-narnih sistema i sistema koji se dobijaju njihovom kombinacijom.

Problem „Zmija u kutiji" u matematici je formulisan zbog potreba u ispravljanju grešaka u transakciji podataka. Međutim, dobijeni rezultati iz prethodnih istraživanja su odnedavna našli veliku primenu i u sistemima sa paralelnim izvršavanjem, kao i u mikrobiologiji, za pronalaženje periodičnih orbita koje opisuju aktivaciju delova gena u razvoju embriona.

Zaključak

Pored analize dosadašnjih rezultata otvorenog problema „Zmija u kutiji", kao i problema „Ciklus u kutiji", u radu je razvijena ideja o primeni Grej koda u sistemima koji se ne zasnivaju na binarnom zapisivanju podataka, već na nekim vrstama n-arnog zapisivanja i njihovim kombinacijama. Dosadašnji rezultati ovog problema već su našli visoku primenu u koding teoriji i digitalnim komunikacijama, čak i u mikrobiologiji, a rezultati dobijeni u ovom radu daju uvod i ideju za eventualni dalji razvoj primene.

Literatura

Abbott H. L., Katchalski M. 1988. On the snake in the box problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **44**: 12.

Harray F., Hayes J. P., Wu H. J. 1988. A survey of the theory of hypercube graphs. *Comput. Math Applic.*, **15**: 32.

web 1. www.ai.uga.edu/sib/records

Ana-Marija Nedić, Maksim Lalić and Jovana Đorđić

Snake in the Box

The work is based on an analysis of an open problem in graph theory, the “Snake in the Box” problem, as well as the “Coil in the Box” problem. In this work, a few aspects of the analysis of results made so far are given. In researches made so far, the “Snake in the Box” problem was resolved only in the hypercube. In this work, the problem was expanded. The idea of Grey code application in systems not based on binary data compression, but on some other kinds of n-ary data notations and their combinations, is developed. The work is based on the “Snake in the Box” and “Coil in the Box” problems applied on the n-cornered pyramid, n-cornered prism, octahedron, dodecahedron, icosahedron and Fibonacci cubes until the seventh dimension, where all solutions are proven and considered in details for all of characteristic cases. The work also contains proof that the found results are maximal and optimal.