Danica Kosanović, Kristina Jovičić i Tanja Asanović

Sinteza L-sistema

L-sistem je sistem naporednog prepisivanja – vrsta formalne gramatike koju je uveo Arstid Lindenmajer (Arstid Lindenmayer) kao osnovu za aksiomatsku teoriju biološkog razvića. Centralno mesto u L-sistemima ima pojam prepisivanja, čija je osnovna ideja definisanje kompleksnih objekata uzastopnim zamenjivanjem njihovih delova jednostavnijim, koristeći skup pravila za prepisivanje. Suštinska razlika između formalnih gramatika i L-sistema leži u metodi primene pravila: kod L-sistema to se čini naporedo – sva slova u reči zamenjuju se istovremeno. Biološka motivacija za razvoj L-sistema jeste namera da se pomoću pravila opiše deoba ćelija u višećelijskim organizmima, gde se mnoge deobe odigravaju istovremeno. U ovom radu razmatran je problem sinteze najjednostavnijih L-sistema – DOL-sistema, na osnovu date funkcije rasta i dokazano je da je, ukoliko je data potpuna funkcija rasta, moguće pronaći L-sistem koji je određuje, pa samim tim i niz koji je određen tom funkcijom. Pronađena je metoda za sintezu na osnovu formule L-sistema – pojma koji je uveden s ciljem da se označi veza između (n+k)-tog člana niza DOL-sistema preko zbira k prethodnih članova tog niza, kao i preko reči iz drugih nizova za koje su poznati DOL-sistemi koji ih generišu. Pomoću ove metode otkriven je i algoritam za sintezu polinomskih funkcija rasta sa prirodnim koeficijentima.

Uvod

1. L-sistemi

Konačni cilj biologije razvića je otkrivanje kako ćelija sa ograničenim neposrednim informacijama može da se razvije u složen organizam. Kompjuterske simulacije višećelijskog razvića jedna su od metoda za istraživanje raznih kompleksnih procesa uključenih u razviće. Modelovanje, simulacija i vizuelizacija razvića biljaka spajaju ideje vezane za veštački život i računarstvo (kompjuterska grafika, teorija formalnih jezika i simulacija) sa znanjima iz biologije, matematike i fizike.

L-sistem je sistem naporednog prepisivanja – vrsta formalne gramatike koju je 1968. uveo biolog Arstid Lindenmajer (Arstid Lindenmayer)

Danica Kosanović (1993), Beograd, Koste Taušanovića 8, učenica 4. razreda Prve beogradske gimnazije

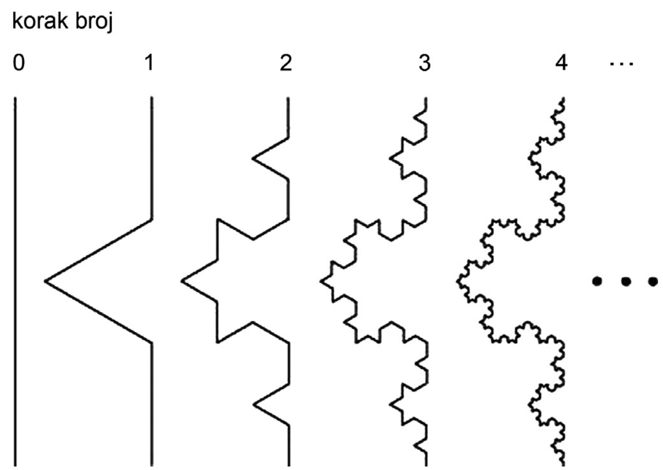
Kristina Jovičić (1994), Smederevska Palanka, Vuka Karadžića 3/23, učenica 2. razreda Palanačke gimnazije

Tanja Asanović (1994), Ruma, Franje Kluza 21, učenica 2. razreda Gimnazije „J. J. Zmaj” u Novom Sadu

kao osnovu za aksiomatsku teoriju biološkog razvića (Lindenmayer 1968). Prema Rozenbergu i Salomi (Rozenberg i Salomaa 1980) dve najvažnije osobine koje su L-sistemi uveli u teoriju formalnih jezika su: naporednost u procesu prepisivanja i shvatanje pojma gramatike kao opisa dinamičkog procesa (koji se odigrava u vremenu), pre nego statičkog.

Centralno mesto u L-sistemima ima pojam prepisivanja, čija je osnovna ideja definisanje kompleksnih objekata uzastopnim zamenjivanjem njihovih delova jednostavnijim, koristeći skup pravila za prepisivanje. Najviše proučavani i najbolje objašnjeni prepisivački sistemi rade na nizovima simbola, a Lindenmajer je predstavio novi tip mehanizma za prepisivanje stringova, koji je kasnije po njemu nazvan L-sistem. Suštinska razlika između formalnih gramatika Čomskog (Chomsky) i L-sistema leži u metodi primene pravila: kod Čomskog se pravila primenjuju redom, jedno po jedno, dok se u L-sistemima to čini naporedo – sva slova u reči zamenjuju se istovremeno. Ta razlika i oslikava biološku motivaciju L-sistema: namera je da se pomoću pravila opiše deoba ćelija u višećelijskim organizmima, gde se mnoge deobe odigravaju istovremeno.

Velika moć L-sistema je u njihovom grafičkom predstavljanju. Klasičan primer grafičkog objekta definisanog pomoću pravila za prepisivanje je snežna pahuljica (slika 1) koju je 1905. god. konstruisao fon Koh (von Koch). Konstrukcija počinje sa dva oblika: inicijator i generator. Generator je orijentisana slomljena linija sastavljena od n jednakih strana dužine r. U svakoj fazi konstrukcije prava linija se lomi i zamenjuje kopijom generatora, pri čemu krajnje tačke ostaju iste kao i pre zamene.



Slika 1. Kohova pahuljica

Figure 1. Koch snowflake

Osnovna ideja L-sistema je da je ćelija prirodna i osnovna jedinica za diskusiju biološkog razvoja, pa su i najjednostavniji organizmi za posmatranje – organizmi u obliku filamenata (lat. *filamentum* – konac, nit). Mikrofilamenti i prelazni filamenti su jedan od osnovnih citoskeleta u eukariotskoj ćeliji. Ako koristimo različite simbole da bismo opisali različita stanja u kojima ćelija može biti, onda će string takvih simbola predstavljati ceo filament. Šta se dešava sa ćelijom u bilo kom datom trenutku, zavisi od njenog stanja i stanja njenih suseda u tom trenutku. L-sistem se sastoji od skupa pravila koji opisuju kako će se tačno ćelija promeniti zavisno od njenog stanja (DOL-) i stanja njenih suseda (DIL- i D2L--sistemi). Ta promena može biti jednostavna promena stanja, ali takođe i deoba ćelije u dve ili više ćelija, ili ćelija čak može nestati, tj. umreti. Ako string simbola (nazvan reč) opisuje stanja ćelija u filamentu, onda istovremenom primenom pravila na sve simbole te reči dobićemo novu reč koja opisuje sledeću fazu razvoja filamenta. Ponavljanjem tog procesa dobijamo celu razvojnu istoriju organizma.

Definicija 1. Svaki L-sistem definisan je trojkom: $G = \{V, \omega, P\}$, gde je V – alfabet (azbuka), konačan neprazni skup simbola koji mogu biti zamenjeni (promenljive), ω – početni niz simbola (aksiom), dakle reč (string simbola) nad alfabetom koja opisuje stanje na početku, a P – skup pravila koja svakom simbolu a date azbuke dodeljuju neki niz $P(a)$ simbola te azbuke (u slučaju DOL-sistema).

Niz $P(a)$, čine jedinstveni stringovi simbola kojima će simbol a biti zamenjen u bilo kom okruženju sa $P(a)$, kod DOL-sistema, kojima se mi u ovom radu bavimo.

2. DOL-sistemi

DOL-sistemi su najjednostavnija klasa L-sistema: određeni su (neslučajni) i ne zavise od konteksta (odnosno, primenjuju se bez obzira na kontekst u kojem se prethodnik pojavljuje). Oni oslikavaju osnovne ideje i tehnike L-sistema i paralelnog prepisivanja uopšte.

Definicija 2. Označimo sa V alfabet, V^* skup svih reči nad V i V^+ skup svih nepraznih reči nad V. String DOL-sistema je uređena trojka: $G = \{V, \omega, P\}$, gde je:

V – alfabet sistema,

$\omega \in V^+$ – neprazna reč, koju nazivamo aksiomom i

$P \in V \times V^*$ – konačan skup pravila.

Pravilo $p_1 \in P$ pišemo kao $p_1: a \to x$. Slovo a i reč x zovemo prethodnikom i sledbenikom pravila, redom. Ako nijedno pravilo nije eksplicitno navedeno za dati prethodnik $a \in V$, uzimamo da je identitet $a \to a$ pravilo koje pripada skupu pravila P. Za svako slovo $a \in V$ postoji bar jedna reč $x \in V^*$, takva da $a \to x$.

Neka je $\mu = A_1A_2 \ldots A_n$ proizvoljna reč nad V, reč $\nu = X_1X_2 \ldots Xn \in V^*$ je direktno izvedena (ili generisana od) μ, što obeležavamo $\mu \to \nu$, akko $A_i \to X_i$ za svako $i = 1, 2, 3, \ldots n$. Reč ν je generisana pomoću G

u izvođenju dužine n, ako postoji razvojni niz reči $\mu_0, \mu_1 \ldots \mu_n$ takav da je $m_0 = \omega, \mu_n = \nu, \mu_0 \rightarrow \mu_1 \rightarrow \ldots \mu_n$.

Funkcija rasta DOL-sistema

Funkcija koja opisuje broj simbola u reči u odnosu na dužinu izvođenja te reči je funkcija rasta. Osnovno svojstvo je to da je funkcija rasta DOL-sistema nezavisna od reda slova u pravilima i dobijenim rečima. Shodno tome, odnos između broja pojavljivanja slova u paru reči μ i ν, tako da $\mu \rightarrow \nu$, može biti izražen koristeći prikaz matrica. Neka je $G = \{V, \omega, P\}$ DOL-sistem, sa alfabetom $V = (A_1, A_2, \ldots A_m)$. Napravimo kvadratnu matricu $Q_{m \times m}$, gde je q_{ij} jednak broju ponavljanja slova A_j u sledbeniku pravila sa prethodnikom A_i. Neka a_i^k predstavlja broj ponavljanja slova a u reči x generisanoj od G u izvođenju dužine k.

Iz definicije direktnog izvođenja sledi:

$$\begin{bmatrix} a_1^k & a_2^k & \ldots & a_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & q_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \ldots & a_n^{k+1} \end{bmatrix}$$

Zapisivanje pomoću matrica korisno je za analizu DOL-sistema.

U ovom radu bavićemo se problemom sinteze DOL-sistema, koji se može ovako formulisati: ako je data funkcija f, naći DOL-sistem čija je to fukncija rasta. A sa ovim je vezano i pitanje: koje funkcije mogu biti funkcije rasta DOL-sistema.

Szilard i Quinton (1979) su pokazali da je svaka pozitivna, neopadajuća, polinomska funkcija sa prirodnim koeficijentima funkcija rasta DOL-sistema. Dokaz ove teoreme pruža i algoritam koji za svaku takvu funkciju (datu na određen način) proizvodi DOL-sistem, a metod koristi funkcije generatrise. Još uvek, međutim, ne postoji algoritam koji bi za datu funkciju odredio da li je ona funkcija rasta DOL-sistema.

U ovom radu dali smo nov metod za sintezu DOL-sistema na osnovu date funkcije, i to pomoću uvedenog pojma formule L-sistema. Takođe, navedeni su neki tipovi funkcija koje mogu biti funkcije rasta DOL--sistema.

1. Uvodne definicije

1. Za L-sistem kažemo da je poznat ako su poznati svi članovi skupa slova V i skupa pravila P, kao i aksioma ω.

2. Dužinu reči μ zapisujemo sa $[\mu]$ i ona predstavlja vrednost te reči. Računanje vrednosti neke reči je ustvari dodeljivanje svakom slovu u reči broj 1 i zatim sabiranje vrednosti svih slova u reči. Zbog toga permutovane reči, tj. reči koje su permutacija jedna druge, imaju istu vrednost. Odavde sledi:

Lema 1. (bez dokaza) Ako u DOL-sistemu promenimo pravilo izvođenja tako što sledbenik zamenimo njegovom proizvoljnom permutacijom, dobijamo L-sistem koji ima istu funkciju rasta. Šta više, ona će ostati nepromenjena i ako u proizvoljnom koraku izvođenja napravimo proizvoljnu permutaciju.

Definicija 3. Niz L-sistema G je niz prirodnih brojeva $f_G : N \to N$ čiji je prvi član dužina (vrednost) aksiome ($f(1) = [\omega]$), a ostali članovi su redom dužine reči izvedene iz aksiome po pravilima L-sistema. Broj $f_G(n)$ je n-ti član niza L-sistema G i predstavlja dužinu n-te reči (računajući da je aksioma prva reč), a nazivamo ga i opštim članom niza L-sistema. Niz $f(G)$ obeležavamo još i sa $(f_G(n))_n$.

Definicija 4. Više istih uzastopnih slova $AA \ldots A$ (k slova) možemo skraćeno zapisati sa A^k, *gde je* k broj slova koja se ponavljaju, $k \in N$.

PRIMER 1. $AABBBBBC = A^2B^5C$

Definicija 5. Konstantno slovo C je slovo sa pravilom $C \to C$. Ovo pravilo se ne mora zapisivati, ali se uvek ubraja u članove skupa P.

U DOL-sistemima svakom slovu, odnosno svakom elementu skupa V, pripisuje se tačno jedno pravilo (u krajnjem slučaju pravilo koje ga preslikava u sebe samog), tako da se skup P formira od tačno onoliko elemenata koliko ih ima V. Dakle, broj elemenata skupa P u DOL-sistemu $G = \{V, \omega, P\}$ jednak je broju elemenata skupa V; odnosno, broj pravila u svakom DOL-sistemu jednak je broju slova.

Definicija 6. Ako je $G = \{V, \omega, P\}$, DOL-sistem sa alfabetom $V = \{A_1, A_2 \ldots A_m\}$, aksiomom $\omega = A^{b_1} A^{b_2} \ldots A^{b_m}$, gde je $b_i \in \mathrm{N}_0$ za $i \in \{1, 2 \ldots m\}$ i skupom pravila: $P = \{p_1, p_2, \ldots p_m\}$, pravilo $p_1 : A_1 \to$ $\to A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}$, $c_i \in \mathrm{N}_0$ za $i \in \{1, 2 \ldots m\}$, obeležavamo sa $p_1(A_1) = A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}$.

Teorema 1. Ako je $p_1(A_1) = A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}$, $c_i \in \mathrm{N}_0$ za $i \in$ $\in \{1, 2 \ldots m\}$, onda je

$$p_1(A_1^{d_1}) = p_1(A_1 A_1 \ldots A_1) = (A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m})^{d_1} = A_1^{c_1 d_1} A_2^{c_2 d_2} \ldots A_m^{c_m d_1} \square$$

Sa $p(\omega)$ obeležićemo reč izvedenu iz aksiome pomoću G, odnosno:

$$\begin{aligned} p_1(\omega) &= p_1(A_1^{b_1} A_2^{b_2} \ldots A_m^{b_m}) \\ &= p_1(A^{b_1}) p_2(A^{b_2}) \ldots p_m(A^{b_m}) \end{aligned}$$

$$= (p_1(A_1))^{b_1}(p_2(A_2))^{b_2}\ldots(p_m(A_m))^{b_m}$$

$b_i \in \mathrm{N}_0$ za $i \in \{1, 2 \ldots m\}$. Ovo izvođenje nazivaćemo prvim korakom izvođenja, a $p(\omega) = f(2)$ drugom reči L-sistema. Drugi korak izvođenja zapisujemo:

$$p(p(\omega)) = p\,[p_1(A_1^{b_1})p_2(A_2^{b_2})\ldots p_m(A_m^{b_m})]$$

pa je treća reč $p(p(\omega)) = p^2(\omega) = f(3)$.

Reč dobijena n-tim korakom izvođenja biće $(n + 1)$-va reč, odnosno $(n + 1)$-vi član niza L-sistema: $f(n+1) = p^n(\omega) = p(p^{n-1}(\omega))$.

Sada možemo dopuniti definiciju 3:

Definicija 7. Ako je $G = \{V, \omega, P\}$ DOL-sistem, onda je njegov niz $(f_G(n))_n$ koji preslikava skup N u N definisan sa $f(n) = [p^{n-1}(\omega)]$. Za $n = 1$, $f(1) = [p^0(\omega)] = [\omega]$.

Jedna od posledica teoreme 1 je sledeća lema.

Lema 2. Neka je $p_1(A_1) = A_1^{c_1}A_2^{c_2}\ldots A_m^{c_m}$, $c_i \in \mathrm{N}_0$, i $c_1 + c_2 + \ldots + c_m = k$, odnosno, neka je dužina sledbenika slova A_1 : $[p_1(A_1)] = k$. Ako je $b \in \mathrm{N}$, onda je:

$$[(p_1(A_1))^b] = k \cdot b.$$

Dokaz. Na osnovu prve teoreme: $(p_1(A_1))^b = (A_1^{c_1}A_2^{c_2}\ldots A_m^{c_m})^b = A_1^{c_1 b}A_2^{c_2 b}\ldots A_m^{c_m b}$, pa je:

$$\begin{aligned}[(p_1(A_1))^b] &= [A_1^{c_1 b}A_2^{c_2 b}\ldots A_m^{c_m b}] = c_1 b + c_2 b + \ldots + c_m b = \\ &= b(c_1 + c_2 + \ldots + c_m) = k \cdot b\end{aligned}$$

Teorema 2. Ako je $G = \{V, \omega, P\}$ poznati DOL-sistem, sa funkcijom rasta f_G, onda je i DOL-sistem $G' = \{V', \omega', P'\}$ sa funkcijom rasta $f_{G'} = k \cdot f_G$, $k \in \mathrm{N}$ poznat i određujemo ga na sledeći način:

$$V' = V$$
$$\omega' = \omega^k$$
$$P' = P$$

Dokaz. Dokažimo da je uslov $\omega' = \omega^k$ potreban i dovoljan za formiranje L-sistema G' pomoću matematičke indukcije.

Induktivna hipoteza je da ako je L-sistem $G' = \{V', \omega', P'\}$ takav da je $\omega' = \omega^k$, gde je ω aksioma L-sistema $G = \{V, \omega, P\}$, onda za nizove ovih L-sistema važi $f_{G'} = k \cdot f_G$.

Proverimo da li hipoteza važi za prva dva člana nizova, odnosno nađimo dužine prve dve reči u oba L-sistema.

Neka je $[p_1(A_1)] = t_1$, $[p_2(A_2)] = t_2$, … $[p_m(A_m)] = t_m$, $t_i \in \mathrm{N}$ za $i \in \{1, 2, \ldots m\}$.

Dužine prve dve reči L-sistema G biće:

$$f_G(1) = [\omega] = [A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}] = c_1 + c_2 + \ldots + c_m$$

$$f_G(2) = [p(\omega)] = [(p_1(A_1))^{c_1} (p_2(A_2))^{c_2} \ldots (p_m(A_m))^{c_m}], \tag{1}$$

pa na osnovu leme 2 iz (1) dobijamo:

$$f_G(2) = t_1 c_1 + t_2 c_2 + \ldots + t_m c_m$$

U L-sistemu G' dužine prve dve reči su:

$$f_{G'}(1) = [\omega'] = [(A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m})^k] = [A_1^{c_1 k} A_2^{c_2 k} \ldots A_m^{c_m k}] =$$

$$= c_1 k + c_2 k + \ldots + c_m k = k(c_1 + c_2 + \ldots + c_m)$$

$$f_{G'}(2) = [p(\omega')] = [p(\omega^k)].$$

S druge strane, ako je $\omega = A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}$, $c_i \in \mathrm{N}_0$ za $i \in \{1, \ldots, m\}$, onda je:

$$p(\omega^k) = p((A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m})^k) = (p(A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}))^k =$$

$$= (p_1(A_1^{c_1}) p_2(A_2^{c_2}) \ldots p_m(A_m^{c_m}))^k =$$

$$= (p_1(A_1^{c_1}))^k (p_2(A_2^{c_2}))^k \ldots (p_m(A_m^{c_m}))^k$$

$$= (p_1(A_1))^{c_1 k} (p_2(A_2))^{c_2 k} \ldots (p_m(A_m))^{c_m k},$$

pa je:

$$f_{G'}(2) = [(p_1(A_1))^{c_1 k} (p_2(A_2))^{c_2 k} \ldots (p_m(A_m))^{c_m k}]$$

$$= [(p_1(A_1))^{c_1 k}] + [(p_2(A_2))^{c_2 k}] + \ldots + [(p_m(A_m))^{c_m k}]$$

Ako ponovo iskoristimo lemu 2, iz poslednjeg imamo:

$$f_{G'}(2) = t_1 c_1 k + t_2 c_2 k + \ldots + t_m c_m k,$$

odnosno

$$f_{G'}(2) = k(t_1 c_1 + t_2 c_2 + \ldots + t_m c_m).$$

Dakle,

$$f_{G'}(1) = k(c_1 + c_2 + \ldots + c_m) = k \cdot f_G(1)$$

$$f_{G'}(2) = k(t_1 c_1 + t_2 c_2 + \ldots + t_m c_m) = k \cdot f_G(2)$$

Pretpostavimo sada da je $f_{G'}(i) = k \cdot f_G(i)$, odnosno:

$f_{G'}(i) = k \cdot [p^{i-1}(\omega)]$ $(*)$, i dokažimo da je: $f_{G'}(i+1) = k \cdot f_G(i+1)$.

Ako je $f_G(i) = [p^{i-1}(\omega)] = A_1^{d_1} A_2^{d_2} \ldots A_m^{d_m}$, onda je na osnovu pretpostavke (*):

$$f_{G'}(i) = p^{i-1}(\omega') = A_1^{kd_1} A_2^{kd_2} \ldots A_m^{kd_m}$$

gde su vrednosti $d_i \in \mathrm{N}_0$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zbirovi svih slova sa indeksom i u reči (redosled slova nije bitan, pa ih na osnovu leme 1 možemo na ovaj način sortirati). Tada imamo:

$$f_{G'}(i+1) = [p^i(\omega')] = [p(p^{i-1}(\omega'))] = [p(A_1^{d_1} A_2^{d_2} \ldots A_m^{d_m})] =$$

$= [(p_1(A_1^{kd_1}))(p_2(A_2^{kd_2}))\ldots(p_m(A_m^{kd_m}))] =$

$= [(p_1(A_1)^{d_1 k})] + [(p_2(A_2)^{d_2 k})] + \ldots + [(p_m(A_m)^{d_m k})] =$

$= t_1 d_1 k + t_2 d_2 k + \ldots + t_m d_m k = k(t_1 d_1 + t_2 d_2 + \ldots + t_m d_m) =$

$= k \cdot ([(p_1(A_1))^{d1}] + [(p_2(A_2))^{d_2}] + \ldots + [(p_m(A_m))^{d_m}]) =$

$= k \cdot ([p(A_1^{d_1} A_2^{d_2} \ldots A_m^{d_m})]) = k \cdot [p(p^{i-1}(\omega))] = k \cdot [p^i(\omega)] =$

$= k \cdot f_G(i+1)$

čime je teorema dokazana. □

Teorema 3. Ako su $G_1 = \{V_1, \omega_1, P_1\}$ i $G_2 = \{V_2, \omega_1, P_2\}$ poznati DOL-sistemi sa funkcijama rasta f_{G_1} i f_{G_2}, onda je i DOL-sistem

$$G' = \{V', \omega', P'\}$$

sa funkcijom rasta

$$f_{G'} = f_{G_1} + f_{G_2}$$

$$f_{G'}(n) = f_{G_1}(n) + f_{G_2}(n) \tag{2}$$

poznat. Sintetišemo ga na sledeći način:

$$V' = V_1 \cup V_2$$
$$\omega' = \omega_1 \omega_2$$
$$P' = P_1 \cup P_2 \tag{3}$$

Pritom, elementima skupova V_1 i V_2 potrebno je izmeniti oznake tako da bude $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (kako se u uniji (3) ne bi javilo više pravila za isto slovo).

Dokaz. Dokažimo teoremu pomoću matematičke indukcije.

Proverimo da li jednakost $f_{G'}(n) = f_{G_1}(n) + f_{G_2}(n)$ važi za $n = 1$:

$\omega_1 = A_1^{c_1} A_2^{c_2} \ldots A_m^{c_m}$

$\omega_2 = B_1^{d_1} B_2^{d_2} \ldots B_m^{d_m}$

$f_{G'}(1) = [\omega_1 \omega_2] = c_1 + c_2 + \ldots + c_m + d_1 + d_2 + \ldots + d_m =$

$= f_{G_1}(1) + f_{G_2}(1)$

Pretpostavimo da jednakost (2) važi za neko k:

$f_{G'}(k) = f_{G_1}(k) + f_{G_2}(k) \Rightarrow [p^k(\omega')] = [p^k(\omega_1)] + [p^k(\omega_2)]$

i dokažimo da važi za $k+1$:

$$f_{G'}(k+1) = [p(p^k(\omega'))] = [p(p^k(\omega_1 \omega_2))] \tag{4}$$

Kako su ω_1 i ω_2 dve aksiome koje nemaju nikakav uticaj jedna na drugu kad su spojene (jer se radi o DOL-sistemu), pretvaranje jedne nema uticaja na pretvaranje druge. Takođe, pretvaranje obe aksiome dok su spojene isto je pretvaranju svake pojedinačno i zatim dopisivanju rezultata jedan uz drugi, poštujući, naravno, redosled aksioma. Prema tome:

$p(\omega_1 \omega_2) = p(\omega_1)p(\omega_2)$

pa samim tim i:

$$p^k(\omega_1\omega_2) = p^k(\omega_1)p^k(\omega_2).$$

Zato iz (4) sledi:

$$f_{G'}(k+1) = [p(p^k(\omega_1)p^k(\omega_2))] = [p(p^k(\omega_1))p(p^k(\omega_2))] =$$

$$= [p^{k+1}(\omega_1)p^{k+1}(\omega_2)] = [p^{k+1}(\omega_1)] + [p^{k+1}(\omega_2)] =$$

$$= f_{G_1}(k+1) + f_{G_2}(k+1)$$

što je i trebalo dokazati. □

PRIMER 2. Neka su funkcije rasta DOL-sistema L_1 i L_2: $f_{L_1}(n) = n$ i $f_{L_2}(n) = 2^n$. Ovi L-sistemi su nam poznati (v. primer 13):

$$L_1 = \{V_1, \omega_1, P_1\}, V_1 = \{A, B\}, \omega_1 = A, P_1 = \{p_1, p_2\}: p_1(A) = AB,$$

$$p_2(B) = B$$

$$L_2 = \{V_2, \omega_1, P_2\}, V_2 = \{M\}, \omega_2 = MM, P_2 = \{t_1\}: t_1(M) = MM$$

Na osnovu prethodne dve teoreme L-sistem $G = \{V, \Omega, P\}$ sa funkcijom rasta $f_G(n) = 5n + 2^n$, odnosno $f_G = 5 \cdot f_{L_1} + f_{L_2}$ takođe nam je poznat:

$$V = V_1 \cup V_2 = \{A, B, M\},$$

$$\Omega = \omega_1\omega_2 = A^5MM,$$

$$P = P_1 \cup P_2 = \{p_1, p_2, t_1\}: p_1(A) = AB, p_2(B) = B, t_1(M) = MM$$

Dakle, ovako će izgledati niz reči G L-sistema:

$$A^5MM, A^5B^5MMMM = A^5B^5M^4, A^5B^5B^5M^8, A^5B^5B^{10}M^{16}\ldots$$

a niz G L-sistema odatle je:

7, 14, 23, 36, 57…

A iz formule $f_G(n) = 5n + 2^n$, zamenjujući n redom sa 1, 2, 3… dobijamo upravo ovaj niz.

2. Formula L-sistema ako nema početnog koraka

U ovom delu razmatraćemo samo DOL-sisteme čiji je prvi član niza jednak 1 (aksioma se sastoji od jednog slova), da bismo u sledećem odeljku mogli da uopštimo zaključke i za ostale DOL-sisteme.

Definicija 8. Formula DOL-sistema $G = \{V, \omega, P\}$ je formula oblika

$$f_G(n+k) = C_0 f_G(n) + C_1 f_G(n+1) + \ldots + C_{k-1} f_G(n+k-1) +$$
$$+ C_k f_{G_0}(n) + C_{k+1} f_{G_1}(n) + \ldots + C_{k+m} f_{G_m}(n)$$

odnosno formula koja izražava $(n + k)$-ti član niza DOL-sistema G preko zbira k prethodnih članova niza i m različitih nizova za koje su poznati DOL-sistemi koji ih generišu. Pri tome, $n \in \mathrm{N}$, $(m, k) \in \mathrm{N}_0$ i $\{C_0, C_1, \ldots$ $\ldots, C_{k+m}\} \in \mathrm{N}_0$, a $G_0, G_1, \ldots, G_m$ su poznati DOL-sistemi.

Ako je za niz G DOL-sistema moguće naći takvu formulu, kažemo da G može biti formulisan.

Napomena: U daljem tekstu, pod nazivom „L-sistem" podrazumevaćemo isključivo DOL-sisteme.

PRIMER 3. (Formula L-sistema sadrži samo opšte članove drugih nizova, ne i prethodne članove sopstvenog – nerekurentna formula)

Neka je funkcija rasta L-sistema $G = \{V, \omega, P\}$ $f_G(n) = 5n + 3$. Formula ovog L-sistema biće:

$$f_G(n) = 5f_H(n) + 3f_M(n),$$

gde je $f_H(n) = n$, a $f_M(n) = 1$. L-sistemi H i M su nam poznati:

$H = \{V_H, \omega_H, P_H\}$, $V_H = \{A, B\}$, $\omega_H = A$, $P = \{p_{H_1}, p_{H_2}\}$, $p_{H_1}(A) = AB$, $p_{H_2}(B) = BM = \{V_M, \omega_M, P_M\}$, $V_M = \{m\}$, $\omega_M = m$, $P = \{p_M\}$, $p_M(m) = m$.

Dakle, G može biti formulisan.

PRIMER 4. (Formula L-sistema koja sadrži i prethodne članove sopstvenog niza – delimično rekurentna formula)

Neka je funkcija rasta L-sistema $G' = \{V', \omega', P'\}$ $f_{G'}(n) = n^2$. Formulu ovog L-sistema izračunavamo na sledeći način:

$$f_{G'}(n+1) = n^2 + 2n + 1 = f_G(n) + 2f_H(n) + f_M(n)$$

gde su L-sistemi H i M isti kao u prethodnom primeru.

PRIMER 5. (Formula L-sistema koja sadrži isključivo prethodne članove sopstvenog niza – rekurentna formula)

L-sistem koji generiše Fibonačijev niz dobro je poznat:

$G'' = \{V'', \omega'', P''\}$, $V'' = \{A, B\}$, $\omega'' = B$, $P'' = \{p_1, p_2\}$, $p_1(A) = AB$, $p_2(B) = A$. Formula ovog L-sistema jednaka je rekurentnoj formuli Fibonačijevog niza:

$$f_{G''}(n+2) = f_{G''}(n+1) + f_{G''}(n).$$

Formule L-sistema omogućavaju laku sintezu svakog DOL-sistema koji može biti formulisan. Svaki član zbira sa desne strane formule L-sistema zapravo je niz nekog drugog L-sistema čiji su nam skupovi slova i pravila, kao i aksioma poznati (radi razlikovanja, te aksiome zvaćemo podaksiomama). Oni određuju podskup slova i podskup pravila traženog L-sistema, kao i deo njegove aksiome ili čitavu aksiomu (v. teoremu 4).

Definicija 9. Ako je formula L-sistema rekurentna (($n + k$)-ti član je potpuno određen prethodnim članovima) ili delimično rekurentna (($n + k$)-ti član je određen bar jednim prethodnim članom i jednim članom drugog niza), onda su podaksiome određene tim prethodnim članovima podaksiome višeg ranga i čine skup podaksiomi višeg ranga.

Rang se određuje prema blizini indeksa prethodnog člana indeksu $(n + k)$: najvišeg ranga biće podaksioma člana čiji je indeks najbliži indeksu $(n + k)$, a najniža podaksioma višeg ranga biće podaksioma člana niza u formuli sa najmanjim indeksom.

PRIMER 6. Ako je:

$$f_G(n+3) = 5f_G(n) + 3f_G(n+1) + f_G(n+2) + f_J(n) + f_J(n+1)$$

formula nekog L-sistema G, onda skup podaksiomi višeg ranga čine podaksiome koje su određene sa prva tri člana zbira. Podaksiomu najvišeg ranga odrediće član $f_G(n+2)$, sledeća po rangu će biti podaksioma određena članom $f_G(n+1)$, a najniža po rangu u ovom slučaju je podaksioma određena članom $f_G(n)$.

$f_J(n)$ i $f_J(n+1)$ nisu prethodni članovi niza G već članovi niza J, pa njihove podaksiome ne pripadaju skupu podaksioma višeg ranga.

Definicija 10. Neka su $C_0 f_G(n)$, $C_1 f_G(n+1)$, …, $C_j f_G(n+j)$, $j = k-1$, članovi formule nekog L-sistema. Nazivamo ih prethodnim članovima niza L-sistema. Podaksioma najvišeg ranga je podaksioma Ω jednaka slovu S, pri čemu za S važi pravilo:

$$A_j \to A_j^{C_j} \omega_0 \omega_1 \ldots \omega_{j-1} \Psi,$$

gde su $\omega_0\omega_1 \ldots \omega_{j-1}$ sve ostale podaksiome višeg ranga u formuli (one koje postoje), Ψ sve ostale podaksiome u formuli, a C_j koeficijent uz član $f_G(n+j)$, pri čemu je, prema definiciji podaksiome najvišeg ranga, $(n+j)$ najveći indeks među prethodnim članovima manji od $(n+k)$.

Članovi oblika $C_i f_G(n+i)$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, j-1\}$ za koje je $C_i = 0$ daju nam ostale podaksiome višeg ranga:

$\omega_i = A_i^{C_i}$

$p_{vi}: A_i \to A_{i+1}$

gde je A_{i+1} sledeća podaksioma viša po rangu, C_i koeficijent ispred člana $f_G(n+i)$ u formuli, a p_{vi} pravilo višeg ranga. Skup svih pravila čiji su prethodnici podaksiome višeg ranga (A_i) nazivamo skupom pravila višeg ranga.

Teorema 4. Ako je niz DOL-sistema $G = \{V, \omega, P\}$ niz koji se može formulisati, i čija je formula:

$$f_G(n+k) = C_0 f_G(n) + C_1 f_G(n+1) + \ldots + C_{k-1} f_G(n+k-1) +$$
$$+ D_1 f_{G_1}(n) + D_2 f_{G_2}(n) + \ldots + D_m f_{G_m}(n)$$

onda je G moguće sintetisati, i to na sledeći način.

Neka su G_1, G_2, …, G_m DOL-sistemi sa sledećim osobinama:

$$G_1 = \{V_1, \omega_1, P_1\},\ G_2 = \{V_2, \omega_2, P_2\},\ \ldots,\ G_m = \{V_m, \omega_m, P_m\}.$$

Koeficijenti ispred članova ovih L-sistema u formuli menjaju njihove aksiome na sledeći način:

$\omega_i = \omega_i^{D_i}$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$

i one postaju podaksiome traženog DOL-sistema. Tada ćemo za G imati:

1. $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m \cup V_{vr}$, *gde je* $V_{vr} = \{A_0, A_1, \dots, A_j\}$ skup podaksioma višeg ranga;

2. aksioma ω je jednaka podaksiomi najvišeg ranga;

3. $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m \cup P_{vr}$, gde je $P_{vr} = \{p_{v0}, p_{v1}, \dots, p_{vk}\}$ skup pravila višeg ranga, za koja važi:

$p_{vj}(A_j) = A_j^{C_j} \omega_0 \omega_1 \dots \omega_{j-1} \Psi_i p_{vi}(A_i) = A_{i+1}$

Dokaz. Na osnovu teorema 2 i 3 očigledno je da drugi deo formule (članovi nizova drugih L-sistema) uslovljava da traženi L-sistem sadrži slova i pravila tih drugih L-sistema. Takođe, njihove aksiome na osnovu teoreme 2 postaju podaksiome traženog L-sistema: $\omega_i = \omega_i^{D_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, a na osnovu teoreme 3, one su spojene $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m$.

Međutim, prvi deo formule (prethodni članovi istog niza) određuju skup podaksioma višeg ranga $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{j-1}$, a pravila koja se odnose na njih su oblika:

$p_{vi}: A_i \rightarrow A_{i+1}$.

Na ovaj način dobijamo prethodne članove niza: slova kasne za po onoliko koraka izvođenja koliko su odaljeni od $(n + k)$-tog člana sa leve strane. Dakle, prvo imamo podaksiomu najvišeg ranga: A_j. Zatim se ona pretvara u niz spojenih podaksioma:

$A_j^{C_j} \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_{j-1} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m$

Odatle od podaksioma oblika Ω_i redom nastaju podaksiome višeg ranga, a od podaksioma oblika ω_i po pravilima ostalih L-sistema počinje izvođenje svakog od tih nizova. Kao posledicu dobijamo reč čiji je broj slova jednak zbiru slova u rečima svih ostalih L-sistema u tom izvođenju i tražena slova svih prethodnih članova (čije je izvođenje kasnilo na odgovarajući način.) □

PRIMER 7. Konstruišimo L-sistem $G = \{V, \Omega, P\}$ čija će funkcija rasta biti $f(n) = n^2$. Iz primera 4 imamo njegovu formulu:

$f_G(n+1) = f_G(n) + 2 f_H(n) + f_M(n)$,

gde je $f_H(n) = n$ i $f_M(n) = 1$, i: $H = \{V_H, \omega_H, P_H\}$, $V_H = \{A, B\}$, $\omega_H = A$, $P_H = \{p_{H_1}, p_{H_2}\}$, $p_{H_1}(A) = AB$, $p_{H_1}(B) = B$

$M = \{V_M, \omega_M, P_M\}$, $V_M = \{m\}$, $\omega_M = m$, $P_M = \{p_M\}$, $p_M(m) = m$.

Pritom, zbog broja 2 ispred drugog člana, aksioma određena H L-sistemom postaje $\omega_H = A^2$.

Kako je $f_G(n)$ prethodni član niza, to će podaksioma određena ovim članom biti podaksioma najvišeg ranga: $\Omega = S$, $p_1(S) = S\omega_H\omega_M = SA^2m$ i formiraće skup podaksioma višeg ranga i skup pravila višeg ranga.

$V = V_H \cup V_M \cup V_{vr} = \{S, A, B, m\}$

$\Omega = S$

$P = P_H \cup P_M \cup V_{vr} = \{p_{H_1}, p_{H_2}, p_M, p_1\}$:

$p_1(S) = SA^2m$, $p_{H_1}(A) = AB$, $P_{H_2}(B) = B$, $p_M(m) = m$.

Provera: S, SA^2m, $SA^2m\text{A}^2\text{B}^2m$, $SA^2mA^2B^2mA^2B^2B^2m$, $SA^2mA^2B^2 mA^2B^2B^2mA^2B^2B^2B^2m\ldots$ Odnosno: 1, 4, 9, 16, 25…

Iz ovog primera može se uočiti da slova m i B koja imaju iste sledbenike možemo smatrati jednakima. L-sistem G može izgledati ovako:

$V = \{S, A, B\}$

$\Omega = S$

$P = \{p_{H_1}, p_{H_2}, p_1\}$:

$p_1(S) = SA^2B, p_{H_1}(A) = AB, p_{H_2}(B) = B.$

i daće niz: $S, SA^2B, SA^2BA^2B^3, SA^2BA^2B^3A^2B^5, SA^2BA^2B^3A^2B^5A^2B^7\ldots$

Odatle možemo izvesti sledeći zaključak:

Slova sa istim sledbenicima u jednom L-sistemu su slova koja daju sebe i/ili isti niz (nekih drugih) slova; ovakva slova (i njihova pravila) mogu se smatrati istima i mogu se zameniti samo jednim od slova sa istim sledbenicima i njegovim pravilom.

Postavlja se pitanje, međutim, šta se dešava sa sintezom L-sistema ako se u formuli pojave prethodni članovi drugih nizova, a ne samo n-ti (def. 8). Da li je sinteza moguća? Proširimo definiciju 8 tako da obuhvati i ove članove i pogledajmo šta će se desiti sa teoremom 4.

Definicija 11. Potpuna formula DOL-sistema ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
f_G(n+k) = {} & C_1 f_G(n) + C_2 f_G(n+1) + \ldots + C_k f_G(n+k-1) + \\
& + D_1 f_{G_1}(n) + D_2 f_{G_1}(n+1) + \ldots + D_{k_1} f_{G_1}(n+k_1-1) + \\
& + E_1 f_{G_2}(n) + E_2 f_{G_2}(n+1) + \ldots + E_{k_2} f_{G_2}(n+k_2-1) + \\
& \vdots \\
& + Z_1 f_{G_m}(n) + Z_2 f_{G_m}(n+1) + \ldots + Z_{k_m} f_{G_m}(n+k_m-1),
\end{aligned}$$

gde su $n \in N, (m, k) \in N_0$, $\{C_1, \ldots, C_k\} \in N_0, G_1, \ldots, G_m$ poznati DOL--sistemi i $D_i \in N_0$, za $i \in \{1, 2, \ldots, k_1\}$, $E_i \in N_0$, za $i \in \{1, 2, \ldots, k_2\}$, … $Z_i \in N_0$, za $i \in \{1, 2, \ldots, k_m\}$.

PRIMER 8. Neka su M i G L-sistemi i neka su njihove formule:

$$f_N(n+4) = f_N(n) + 2f_N(n+3) \tag{5}$$

$$f_M(n+1) = 3f_M(n) + 7f_M(n+1) + f_M(n) \tag{6}$$

$$f_G(n+3) = f_G(n) + f_G(n+2) + f_M(n) + f_M(n+2) + f_N(n+1) \tag{7}$$

U formuli (5) niz L-sistema N izražen je samo preko prethodnih članova istog niza, pa je nazivamo rekurentnom; u formuli (6) niz zavisi od prethodnih članova istog niza, ali i n-tog člana niza f_N – delimično je rekurentna; formula (7) je najsloženija: član niza f_G zavisi od prethodnih članova istog niza, od n-tog i $(n + 2)$-og člana niza f_M i $(n + 1)$-og člana niza f_N, pa je nazivamo potpunom. Dakle, formule (5) i (6) su obuhvaćene i definicijom 8, dok definicija 11 obuhvata i (7).

Da bi našli algoritam za sintezu DOL-sistem, a čija je formula potpuna, prvo ćemo proveriti jednostavniji slučaj kada su svi ostali koeficijenti osim C_1 i D_2 u potpunoj formuli jednaki nuli.

$$f_G(n+k) = C_1 f_G(n) + D_2 f_{G_1}(n+1), \tag{8}$$

za $C_1 = 1$, $D_2 = 1$.

Relacija (8) postaje:

$$f_G(n+1) = f_G(n) + f_{G_1}(n+1) \tag{9}$$

Način pronalaženja DOL-sistema čija je formula oblika (9) daje naredna lema.

Lema 3. Ako je f funkcija rasta DOL-sistema $G = \{V, \omega, P\}$, koji nam je poznat, a F funkcija rasta DOL-sistema $G' = \{V', \omega, P'\}$ i ako je $p^{n-1}(\Omega)$ n-ta reč za koju važi: $F(n+1) = F(n) + f(n+1)$, odnosno:

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

onda za G' važi:

1. $V' = V \cup \{S\}$,
2. $\Omega = S$ – aksioma višeg (i najvišeg) ranga u odnosu na ω,
3. $P' = P \cup \{p_{k+1}\}$, gde je pravilo $p_{k+1}: S \rightarrow Sp(\omega)$ (G L-sistem ima k pravila).

Dokaz. Neka su dužine reči G L-sistema: $[\omega] = a_1$, $[p(\omega)] = a_2$, $[p^2(\omega)] = a_3$, … $[p^n(\omega)] = a_{n+1}$. Kako nema početnog koraka, to je $a_1 =$ $= 1$, pa je $[S] = 1 = a_1$.

U L-sistemu G' biće:

$\Omega = S$,

$p(\Omega) = p(S) = S_p(\omega)$,

$p^2(\Omega) = p(p(\Omega)) = p(S_p(\omega)) = p(S)p^2(\omega) = S_p(\omega)p^2(\omega)$,

$\vdots$

$p^n(\Omega) = p(p^2(\Omega)) = S_p(\omega)p^2(\omega)p^3(\omega)\ldots p^n(\omega)$

Pa će dužine reči u G' biti:

$[\Omega] = [S] = a_1$

$[p(\Omega)] = [S_p(\omega)] = a_1 + a_2$,

$[p^2(\Omega)] = [S_p(\omega)p^2(\omega)] = a_1 + a_2 + a_3$

$$[p^3(\Omega)] = [S_p(\omega)p^2(\omega)p^3(\omega)] = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\vdots$$

$$[p^n(\Omega)] = [S_p(\omega)p^2(\omega)\dots p^3(\omega)] = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

Dakle, dužina $(n+1)$-ve reči jednaka je zbiru prethodne reči i $(n+1)$-ve reči niza f_G.

PRIMER 9. Funkcija $F(n) = n$ može se zapisati kao

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

gde je $f(n) = 1$, pa je formula zapravo:

$$F(n+1) = n+1 = F(n) + f(n+1)$$

Dakle, L-sistem konstruišemo na sledeći način:

1. L-sistem sa funkcijom rasta $(f(n))_n$ ima sledeće osobine:

$V = \{M\}, \omega = M, P = \{p_1\}, p_1(M) = M.$

2. L-sistem sa funkcijom rasta $(F(n))_n$ imaće sledeće osobine:

$V' = \{M, S\},$

$\Omega = S,$

$P' = \{p_1', p_2'\}$: $p_1'(M) = M, p_2'(S) = SM$. Dakle, možemo napisati $p_1(M) = p_1'(M) = M$.

Ako proverimo, za 1. imamo niz:

M, *M*, *M*, *M*…

a za 2:

S, SM, SSM, SSSM…

Odnosno: 1, 1, 1, 1… i 1, 2, 3, 4…

Na osnovu zaključaka izvedenih iz leme 2 i prethodnih primera sa formulama koje sadrže samo po jedan prethodni član drugih nizova, izvodimo i zaključke za sintezu DOL-sistema sa više prethodnih članova sopstvenog, ali i drugih nizova, pa dobijamo teoremu 5, dakle poboljšanje teoreme 4.

Teorema 5. Neka je $G = \{V, \omega, P\}$ L-sistem čija je formula:

$$\begin{aligned} f_G(n+k) &= C_0 f_G(n) + C_1 f_G(n+1) + \dots + C_k f_G(n+k-1) + \\ &+ D_{10} f_{G_1}(n) + D_{11} f_{G_1}(n+1) + \dots + D_{1j} f_{G_1}(n+j) + \\ &+ D_{20} f_{G_2}(n) + D_{21} f_{G_2}(n+1) + \dots + D_{2j} f_{G_1}(n+j) + \\ &\vdots \\ &+ D_{m0} f_{G_m}(n) + D_{m1} f_{G_m}(n+1) + \dots + D_{mj} f_{G_m}(n+j) \end{aligned} \tag{10}$$

gde su:

$n \in N, m, k, j \in N_0, j \le k-1, C_0, C_1, \dots, C_k \in N_0, G_1, G_2, \dots, G_m$

poznati L-sistemi i

$D_{li} \in N_0$, za $l \in \{1, 2, \dots m\}$ i $i \in \{0, 1, 2, \dots j\}$.

Neka su $G_1, G_2, \dots, G_m$ L-sistemi sa sledećim osobinama:

$$G_1 = \{V_1, \omega_1, P_1\}, \; \ldots \; G_m = \{V_m, \omega_m, P_m\}.$$

Tada će skupovi $V_1, V_2, \ldots, V_m$ biti podskupovi traženog L-sistema, a skupovi $P_1, \ldots, P_m$ podskupovi pravila.

Svi članovi niza ovih L-sistema koji se pojavljuju u formuli određuju isti podskup slova i podskup pravila traženog L-sistema, dok podaksiome određene tim članovima čine skupove podaksioma. Tako imamo:

za $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ svi članovi niza G_i određivaće redom:

(a) skup podaksioma $\left\{ \left(\Psi_0\right)^{D_{i0}}, \left(\Psi_1\right)^{D_{i1}}, \ldots, \left(\Psi_j\right)^{D_{ij}} \right\}$

(b) podskup slova $V_{podi} = \{\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_j\}$

(c) i podskup pravila $P_{podi} = \{p_{\Psi_0}, p_{\Psi_1}, \ldots, p_{\Psi_j}\}$

$$p_{\Psi_0}(\Psi_0) = p^1(\omega_i) = p(\omega_i), p_{\Psi_1}(\Psi_1) = p^2(\omega_i), \ldots, p_{\Psi_j}(\Psi_j) = p^{j+1}(\omega_i);$$

Dakle, $p_{\Psi_z}(\Psi_z) = p^{z+1}(\omega_i)$.

G se može formulisati i to na dva načina, u zavisnosti da li u formuli postoje članovi iz reda (10).

1. Ako je bar jedan od koeficijenata C različit od nule (dakle, postoji bar jedan prethodni član niza G):

Prethodni članovi niza G određuju:

– skup podaksioma višeg ranga:

$$\Omega_i = A_i^{C_i} i \in \{0,1,\ldots,j-1\}, \Omega_j = A_j,$$

– podskup slova: $V_{vr} = \{A_0, A_1, \ldots, A_j\}$,

– i podskup pravila (skup pravila višeg ranga):

$$P_{vr} = \{p_o(A_0), p_1(A_1), \ldots, p_j(A_j)\}$$

$$p_0(A_o) = A_1, p_1(A_1) = A_2, \ldots, p_{j-1}(A_{j-1}) = A_j$$

$$p_j(A_j) = A_j^{C_j} \Omega_o \Omega_1 \ldots \Omega_{j-1} \Psi,$$

gde su sa Ψ označene sve ostale podaksiome u formuli.

Ψ (to je Ψ iz sledbenika pravila najvišeg ranga, v. definiciju 10) će, dakle, biti jednako nizu:

$$\Psi = \left(\alpha_1\right)^{D_{11}} \left(\alpha_2\right)^{D_{12}} \ldots \left(a_{k+1}\right)^{D_{1(k+1)}} \left(\beta_1\right)^{D_{21}} \left(\beta_2\right)^{D_{22}} \ldots$$

$$\ldots \left(\beta_{k+1}\right)^{D_{2(k+1)}} \ldots \left(\Psi_2\right)^{D_{i1}} \left(\Psi_2\right)^{D_{i2}} \ldots \left(\Psi_{k+1}\right)^{D_{ik+1}}$$

Onda ćemo za G imati:

(a) $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_m \cup V_{vr} \cup V_{pod1} \cup V_{pod2} \cup \ldots \cup V_{podm}$

gde je V_{vr} skup podaksioma višeg ranga, a skupovi V_i i V_{podi}, $i \in \{1, 2, \ldots m\}$ podskupovi slova;

(b) aksioma ω je jednaka podaksiomi najvišeg ranga: A_k;

(c) $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \ldots \cup P_m \cup P_{vr} \cup P_{pod1} \cup V_{pod2} \cup \ldots \cup P_{podm}$

gde je V_{vr}, gde je P_{vr} skup pravila višeg ranga, a P_i i P_{podi}, $i \in \{1, 2, \ldots m\}$, su podskupovi pravila.

2. Ako u formuli (10) nema nijednog prethodnog člana traženog niza G, L-sistem dobijamo na sledeći način: skupovi $V_1, V_2, \ldots, V_m$ biće podskupovi traženog L-sistema, a skupovi $P_1, P_2, \ldots, P_m$ podskupovi pravila.

Svi članovi niza ovih L-sistema koji se pojavljuju u formuli određuju isti podskup slova i podskup pravila traženog L-sistema, dok podaksiome određene tim članovima čine skupove podaksioma. Tako imamo:

(a) $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup V_{pod1} \cup \ldots \cup V_{podm}$, gde su skupovi V_i i V_{podi}, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ podskupovi slova;

(b) aksioma ω je jednaka S;

(c) $P = P_1 \cup \ldots \cup P_m \cup P_{pod1} \cup \ldots \cup P_{podm}$, gde su P_i i P_{podi}, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, podskupovi pravila, a pravilo p_S odnosi se na slovo S i jednako je članovima skupa podaksioma dopisanim jedan do drugog:

$$p_S(S) = (\Psi_0)^{D_{i0}} (\Psi_1)^{D_{i1}} \ldots (\Psi_j)^{D_{ij}}$$

Dokaz. Dokazom teoreme 4 već je dokazano da skup slova L-sistema mora sadržati podskupove slova svih drugih nizova, kao i skup podaksioma višeg ranga.

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup V_{vr}$$

Isto tako, skup pravila sadrži skupove pravila ostalih nizova i skup pravila višeg ranga:

$$P = P_1 \cup \ldots \cup P_m \cup P_{vr}.$$

Aksioma je bila jednaka aksiomi najvišeg ranga.

Dokažimo prvo prvi deo teoreme 5.

Aksioma je ovde takođe jednaka podaksiomi najvišeg ranga. Potrebno je i dovoljno dokazati da skup slova mora da sadrži podskupove ostalih podaksioma (a ne samo podaksioma višeg ranga), a skup pravila ostale podskupove pravila određene prethodnim članovima drugih nizova.

Aksioma u prvom koraku izvođenja pretvara se u sebe i niz ostalih podaksioma. U drugom koraku izvođenja svaka podaksioma daje svoje sledbenike: podaksiome višeg ranga daju redom više aksiome, a ostale podaksiome, prema teoremi 5, daju različite reči iz svog niza. Ako se radi o n-tom članu niza, onda podaksioma određena njime daje isti proizvod kao što bi dala aksioma tog niza, odnosno drugu reč. A ako se radi o $(n+i)$-tom članu niza u formuli, onda podaksioma daje $(i+1)$-vu reč iz niza. Razlog za to je očigledan: $(n+i)$-ti član niza treba da da $(n+i+1)$-vi član niza.

Dakle, u prvom izvođenju, a i u svakom narednom, primenjuje se pravilo za podaksiomu najvišeg ranga (PNR), u drugom izvođenju, osim njega, primenjuju se pravila iz skupa pravila višeg ranga, kao i pravila za podaksiome, a zatim se u svakom sledećem izvođenju uz pravilo za PNR izvršavaju pravila iz ostalih L-sistema: $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m$.

Dokažimo i drugi deo teoreme 5.

On se odnosi na slučajeve kada u formuli nema prethodnih članova istog niza, pa pogledajmo po čemu se ovaj slučaj razlikuje od prethodnog. Sada ne postoji skup podaksioma višeg ranga (PVR), pa samim tim ni skupovi slova i pravila PVR, pa su oni izuzeti iz algoritma za sintezu L-sistema koji je korišćen u prvom slučaju. Takođe, aksioma je umesto PNR jednaka nekom slovu S za koje važi pravilo p_S koje je uvršteno u skup pravila traženog L-sistema, pri čemu je:

$$p_S(S) = (\Psi_0)^{D_{i0}}(\Psi_1)^{D_{i1}}\ldots(\Psi_j)^{D_{ij}}$$

Dakle, S u prvom koraku izvođenja postaje niz podaksioma. One zatim dalje daju, isto kao u prvom slučaju, naredne reči svojih L-sistema. Razlika između S i PNR je u tome što se S ne pretvara u sebe (nema dodavanja prethodnih članova istog niza) i što nema podaksioma višeg ranga.

Ovim razmatranjem teorema je dokazana. □

PRIMER 11. Neka je f_F Fibonačijev niz, pri čemu je F poznat L-sistem $f_M(n+1) = f_M(n) + 3f_F(n) + f_F(n+1)$.

Od prethodnih članova M niza imamo samo jedan član $f_M(n)$. On određuje:

– podskup slova $V_{vr} = \{S\}$, aksiomu najvišeg ranga $\Omega = S$,

– podskup pravila $P_{vr} = \{p_s\}$, $p_S(S) = S\Psi$;

U formuli M L-sistema nalazimo samo jedan niz (različit od traženog niza f_M): to je niz F L-sistema. Njegovi skupovi slova i pravila određuju podskupove slova i pravila traženog M: V_F i P_F;

Niz f_F zastupljen je sa dva člana: $f_F(n)$ i $f_F(n+1)$ i oni određuju sledeće:

– podaksiome su O^3, T

– podskup slova određenih tim članovima je $V_{pod1} = \{O, T\}$, a podskup pravila $P_{pod1} = \{p_O, p_T\}$, $p_O(O) = p(\omega) = A$,

$p_T(T) = p^2(\omega) = AB$

M L-sistem će biti:

$$V_M = V_{vr} \cup V_F \cup V_{pod1} = \{S, A, B, O, T\},$$

$$\Omega = S,$$

$$P_M = P_{vr} \cup P_F \cup P_{pod1} = \{p_S, p_1, p_2, p_O, p_T\}:$$

$p_S(S) = SO^3T$, $p_1(A) = AB$, $p_2(B) = A$, $p_O(O) = p(\omega) = A$, $p_T(T) = p^2(\omega) = AB$

Proverimo koja slova imaju iste sledbenike i zamenimo ih: $O = B$, $T = A$, pa konačno imamo M:

$V_M = V_{vr} \cup V_F \cup V_{pod1} = \{S, A, B\}$,

$\Omega = S$,

$P_M = P_{vr} \cup P_F \cup P_{pod1} = \{p_S, p_1, p_2\}$:

$p_S(S) = SB^3A$, $p_1(A) = AB$, $p_2(B) = A$

Proverimo:

S, SB^3A,SB^3AA^3BA, $SB^3AA^3BAA^3B^3AAB$, $SB^3AA^3BAA^3B^3A$ ABA^3B^3 A^3ABABA…

1, 5, 10, 19, 33…

A ako u formuli $f_M(n+1) = f_M(n) + 3f_F(n) + f_F(n+1)$ zamenimo n sa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, pri čemu imamo $f_F(1) = 1$, $f_F(2) = 1$ dobićemo:

$f_M(1) = 1$

$f_M(2) = f_M(1) + 3f_F(1) + f_F(2) = 1 + 3 + 1 = 5$

$f_M(3) = f_M(2) + 3f_F(2) + f_F(3) = 5 + 3 + 2 = 10$

$f_M(4) = f_M(3) + 3f_F(3) + f_F(4) = 10 + 6 + 3 = 19$

$f_M(5) = f_M(4) + 3f_F(4) + f_F(5) = 19 + 9 + 5 = 33$

3. Formula L-sistema sa korakom

Definicija 12. Ako prvi član niza (dužina aksiome) nije jednak jedinici već nekom $\varphi \in \mathrm{N}$, onda taj broj nazivamo *početnim korakom* i u formuli ga zapisujemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&f_G(n+k) = C_0 f_G(n) + C_1 f_G(n+1) + \ldots + C_k f_G(n+k) + \\
&+D_{10} f_{G1}(n) + D_{11} f_{G1}(n+1) + \ldots + D_{1k} f_{G1}(n+k) + \\
&+D_{20} f_{G2}(n) + D_{21} f_{G2}(n+1) + \ldots + D_{2k} f_{G2}(n+k) + \\
&\vdots \\
&+D_{m0} f_{Gm}(n) + D_{m1} f_{Gm}(n+1) + \ldots + D_{mk} f_{Gm}(n+k) + \\
&+ [\varphi]
\end{aligned}
$$

Teorema 6. Konstruisanje DOL-sistema sa početnim korakom isto je kao kod DOL-sistema bez njega, osim što je aksiomi potrebno dodati φ konstantnih slova. □

Napomena: Početni korak izdvajamo zagradama $[\varphi]$ upravo da ne bi došlo do mešanja sa konstantnim nizovima u formuli DOL-sistema. Razlika između njih i početnog koraka je upravo u činjenici da se oni dodaju svakom članu, dok je početni korak dodat samo na početku, aksiomi, i više se ne dodaje.

PRIMER 12. Nađimo L-sistem G sa funkcijom rasta $F_G(n) = n + 5$. U primeru 6. konstruisali smo L-sistem sa funkcijom rasta $F(n) = n$ i to uz pomoć činjenice da je $n = \sum_{k=1}^{n} 1$.

I sada ćemo postupiti na sličan način, osim što ćemo u formuli imati i početni korak $\varphi = 5$:

$F_G(n + 1) = F_G(n) + f(n) + [5]$,

gde $f(n) = 1$ određuje podaksiomu M i pravilo $M \to M$, a $F_G(n)$ podaksiomu višeg ranga S i pravilo $S \to SM$. Početni korak [5] menja aksiomu tako što joj povećava dužinu za 5 konstantnih slova: $\Omega = SM^5$. Dakle, L-sistem G je oblika:

$G = \{V, \omega, P\}$, $V = \{M, S\}$, $\Omega = SM^5$

$P = \{p_1, p_2\}$: $p_1(M) = M$, $p_2(S) = SM$.

A proverom se uveravamo da ovaj L-sistem ima traženu funkciju rasta.

4. Stepena funkcija

Lako je utvrditi da je za svaku funkciju oblika $f(n) = k^n$ poznat DOL-sistem čija je to funkcija rasta.

Teorema 7. Ako je $f(n) = k^n$ funkcija rasta DOL-sistema $G = \{V, \omega, P\}$, onda je: $V = \{A\}$, $\omega = A^k$, $P = \{p_1\}$, $p_1(A) = A^k$.

Dokaz. $\omega = A^k$, $p(\omega) = p(A^k) = (p_1(A))^k = (A^k)^k = A^{k^2}$.

Dakle: $p^n(\omega) = A^{k^n}$, pa je $[p^n(\omega)] = k$. □

PRIMER 13. Nađimo L-sistem sa funkcijom rasta $f_G = 2^n$. Prema poslednjoj teoremi:

$V = \{A\}$, $\omega = A^2$, $P = \{p_1\}$: $p_1(A) = A^2$.

Ako proverimo, imaćemo niz: A^2, A^4, A^8…

5. Polinomske funkcije

Sinteza DOL-sistema sa funkcijama rasta oblika $f(n) = n^k$ nije tako jednostavna kao sinteza onih sa stepenom funkcijom, ali olakšana je korišćenjem formula DOL-sistema.

PRIMER 14. U primeru 4 našli smo formulu L-sistema čija je funkcija rasta $f_G(n) = n^2$, a u primeru 7 našli smo i njegove osobine.

$V = \{S, A, B\}$

$\Omega = S$

$P = \{p_{H_1}, p_{H_2}, p_1\}$: $p_{H_1}(A) = AB$, $p_{H_2}(B) = B$, $p_1(S) = SA^2B$.

Konstruišimo sada L-sistem sa funkcijom rasta $f_T(n) = n^3$. Njegova formula je:

$$f_T(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = f_T(n) + 3f_G(n) + 3f_H(n) + f_M(n)$$

$$G = \{V, \Omega, P\},\ V = \{S, A, B\}, \Omega = S^3,\ P = \{p_{H_1}, p_{H_2}, p_1\}:$$

$$p_1(S) = SA^2B,\ p_{H_1}(A) = AB,\ p_{H_2}(B) = B. \qquad (11)$$

$$H = \{V_H, \omega_H, P_H\},\ V_H = \{A, B\}, \omega_H = A^3, P_H = \{p_{H1}, p_{H2}\},$$

$$p_{H1}(A) = AB,\ p_{H2}(B) = B \qquad (12)$$

$$M = \{V_M, \omega_M, P_M\},\ V_M = \{m\}, \omega_M = m, P_H = \{p_m\},\ p_M(m) = m$$

Kako su pravila iz (11) i (12) ista, možemo da ostavimo iste simbole u oba skupa (V i V_H).

Skup podaksiomi višeg ranga ima samo jedan član: to je podaksioma najvišeg ranga $\omega_T = T$, a skup pravila višeg ranga jedno pravilo: $p_T(T) = T\mathrm{p}_\mathrm{T}$, $T\Omega\omega_\mathrm{H}\omega_M = TS^3A^3m$. Dakle:

$$A_{vr} = \omega_T, P_{vr} = p_T.$$

Opet možemo slovo m zameniti sa B jer su oba konstantna slova (slikaju se sama u sebe).

Dakle, L-sistem G ima sledeće osobine:

$$V_T = V \cup V_H \cup V_M \cup V_{vr} = \{T, S, A, B\}$$

$$\Omega_T = T,$$

$$P_T = P \cup P_H \cup P_M \cup P_{vr} = \{p_T p_{H_1} p_{H_2} p_1\}:$$

$$p_T(T) = TS^3AB,\ p_H(A) = AB,\ p_H(B) = B,\ p_1(S) = SA^2B.$$

Očigledno je da na ovaj način možemo sintetisati L-sistem za svaku funkciju oblika $f(n) = n^k$, a samim tim (uz pomoć formule) i svaki L-sistem oblika:

$$F(n) = c_1 n^k + c_2 n^{k-1} + \ldots + c_k n^1 + n^0,$$

dakle, L-sistem sa polinomskom funkcijom rasta.

Zapišimo pravila L-sistema G i T na sledeći način:

$G : p_1(S) = SA^2B,\ p_{H_1}(A) = AB,\ p_{H_2}(B) = B;$

$T : p_T(T) = TS^3A^3B,\ p_1(S) = SA^2B,\ p_H(A) = AB,\ p_H(B) = B.$

Ako zapišemo sledbenike svih pravila:

121, 11, 1;

1331, 121, 11, 1

lako se uočava sličnost sa Paskalovim trouglom, odnosno binomnim koeficijentima. Otud i sledeća teorema:

Teorema 8. DOL-sistem sa funkcijom rasta $F(n) = n^k$ imaće aksiomu $\omega = A^k$ i sledeća pravila:

$$A_k \to A_k^{\binom{k}{0}} A_{k-1}^{\binom{k}{1}} A_{k-2}^{\binom{k}{2}} \ldots A_1^{\binom{k}{k-1}} A_0^{\binom{k}{k}}$$

$$A_{k-1} \rightarrow A_{k-1}^{\binom{k-1}{0}} A_{k-2}^{\binom{k-1}{1}} A_{k-3}^{\binom{k-1}{2}} \ldots A_1^{\binom{k-1}{k-2}} A_0^{\binom{k-1}{k-1}}$$

$$A_{k-2} \rightarrow A_{k-2}^{\binom{k-2}{0}} A_{k-3}^{\binom{k-2}{1}} A_{k-4}^{\binom{k-2}{2}} \ldots A_1^{\binom{k-2}{k-3}} A_0^{\binom{k-2}{k-2}}$$

$$A_{k-2} \rightarrow A_{k-2}^{\binom{k-2}{0}} \ldots A_1^{\binom{k-2}{k-3}} A_0^{\binom{k-2}{k-2}}$$

$$\vdots$$

$$A_1 \rightarrow A_1^{\binom{1}{0}} A_0^{\binom{1}{1}}$$

$$A_0 \rightarrow A_0^{\binom{0}{0}}$$

Dokaz. Dokazaćemo teoremu pomoću totalne matematičke indukcije.

Napomena: pravilo za slovo A_i ćemo umesto sa $p_i(A_i)$ u ovom dokazu obeležavati jednostavnije sa $p(A_i)$.

Induktivna hipoteza je da je za svako $i \in N_0$ i za svako $m \in N$, A_i slovo koje posle m iteracija generiše broj $(m+1)^i$, odnosno $F_i(m+1) =$ $= [p^m(A_i)] = (m+1)^i$. Indukciju izvodimo po i.

Proverimo da li je za dati L-sistem $F_i(1) = 1^i = 1$

$F_i(1) = [\omega] = [A_i] = 1$

Pretpostavimo da važi:

> A_i posle m iteracija generiše broj $(m + 1)^i$ za svako $0 \leq i \leq n$ i za svako $m \in N$ (*)

i dokažimo da važi:

> A_{n+1} posle m iteracija generiše broj $(m + 1)^{n+1}$ za svako $m \in N$ (**)

Za dokaz ponovo koristimo matematičku indukciju, ovog puta po m.

Za $m = 0$:

$F_{n+1}(1) = [p^0(\omega)] = [A_{n+1}] = 1 \ (= a^{n+1})$

Za $m = 1$:

$$F_{n+1}(2) = [p^1(A_{n+1})] =$$

$$= \left[A_{n+1}^{\binom{n+1}{0}} A_n^{\binom{n+1}{1}} A_{n-1}^{\binom{n+1}{2}} \ldots A_1^{\binom{n+1}{n}} A_0^{\binom{n+1}{1}} \right] =$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$= (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$$

Pretpostavimo da (**) važi za neko $m \in N$, i dokažimo da onda posle m+1 iteracija A_{n+1} generiše broj $(m+2)^{n+1}$.

Ako je (**), onda imamo:

$F_{n+1}(m+1) = [p^m(A_{n+1})] = (m+1)^{n+1}$, a treba dokazati:

$$F_{n+1}(m+2) = [p^{m+1}(A_{n+1})] = (m+2)^{n+1}$$

Imamo sledeće:

$$[p^{m+1}(A_{n+1})] =$$

$$= \left[p^m \left(A_{n+1}^{\binom{n+1}{0}} A_n^{\binom{n+1}{1}} A_{n-1}^{\binom{n+1}{2}} \ldots A_1^{\binom{n+1}{n}} A_0^{\binom{n+1}{n+1}} \right) \right] =$$

$$= [p^m(A_{n+1})]^{\binom{n+1}{0}} [p^m(A_n)]^{\binom{n+1}{1}} \ldots [p^m(A_1)]^{\binom{n+1}{n}} [p^m(A_0)]^{\binom{n+1}{n+1}}$$

a kako je na osnovu (*) i (**): $[p^m(A_i)] = (m+1)^i$, onda je:

$$[p^{m+1}(A_{n+1})] = (m+1)^{n+1} \cdot \binom{n+1}{0} + (m+1)^n \cdot \binom{n+1}{1} +$$

$$+ (m+1)^1 \cdot \binom{n+1}{n} + (m+1)^0 \cdot \binom{n+1}{n+1} \tag{13}$$

Sada pomoću formule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n$$

iz (13), za $(x, y, n) = (m + 1, 1, n + 1)$, dobijamo

$$\left[p^{m+1}(A_{n+1}) \right] = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (m+1)^{n+1-k} = (m+1+1)^{n+1}$$

Dakle:

$$F_{n+1}(m+2) = [p^{m+1}(A_{n+1})] = (m+2)^{n+1}$$

čime je teorema dokazana. □

Zaključak

Sinteza DOL-sistema na osnovu date funkcije rasta jedan je od često rešavanih problema iz teorije L-sistema. Prednost rešenja prikazanog u ovom radu je njegova jednostavnost, koja je postignuta uvođenjem termina: formula L-sistema, podaksioma višeg ranga i rang podaksiome. Formula L-sistema je formula koja izražava $(n + k)$-ti član niza DOL-sistema G preko zbira k prethodnih članova tog niza i m različitih nizova za koje su poznati DOL-sistemi koji ih generišu. Ako je formula L-sistema G nekog niza rekurentna ili delimično rekurentna, onda su podaksiome određene prethodnim članovima tog niza podaksiome višeg ranga i čine skup podaksiomi višeg ranga. Rang se određuje prema blizini indeksa prethodnog člana indeksu ($n + k$): najvišeg ranga biće podaksioma člana čiji je indeks najbliži indeksu ($n + k$), a najniža podaksioma višeg ranga biće podaksioma člana niza u formuli sa najmanjim indeksom. Korišćenje pojma rang podaksiome omogućuje nam da lakše dokažemo uvedene teoreme i odredimo L-sistem za datu potpunu formulu L-sistema. Niz G može biti formulisan ako je za njega moguće naći formulu L-sistema. Sa nađenom formulom L-sistema lako se pronalaze slova, pravila i aksioma tog L-sistema. Uz pomoć metode uvođenja formule L-sistema u ovom radu je objašnjen i jednostavan metod za sintezu DOL-sistema sa stepenim i polinomskim funkcijama rasta.

Literatura

Abelson H., diSessa A. A. 1982. *Turtle Geometry*. M.I.T. Cambridge: MIT Press

Federl P., Prusinkiewicz P. 1999. Virtual Laboratory: an interactive software environment for computer graphics. U *Proceedings of Computer Graphics International*, str. 93-100.

Lindenmayer A. 1968. Mathematical models for cellular interaction in development. parts i and ii. *Journal of Theoretical Biology*, **18**: 280–299 i 300–315.

Mech R., Prusinkiewicz P. 1996. Visual models of plant interacting with their enviroment. *Proceedings of SIGGRAPH 96*, str. 397-410.

Prusinkiewicz P. 1986. Graphical applications of l-systems. U *Proceedings of Vision Interface '86*, str. 247–253.

Prusinkiewicz P. 1987. Applications of l-systems to computer imagery. U *Graph grammars and their applications to computer science; Third international workshop* (ur. H Ehrig et al.). Springer-Verlag, str. 34-42.

Prusinkiewicz P., James H. 1989. *Lindenmayer systems, fractals and plants*. Springer

Prusinkiewicz P., Lindenmayer A. 1990. *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer

Prusinkiewicz P., Hammel M., Mjolsness E. 1993. Animation of Plant Development. Proceedings of SIGGRAPH 93 (Anaheim, California, August 1–6, 1993). U *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, str. 351-360.

Rozenberg G., Salomaa A. 1980. The mathematical theory of L systems. New York: Academic Press

Szilard A. L., Quinton R. E. 1979. An interpretation for d0l systems by computer graphics. *The Science Terrapin*, **4**: 8.

Danica Kosanović, Kristina Jovičić and Tanja Asanović

Synthesis of L-systems

L-system is a system of string rewriting – a type of formal grammars, introduced by Aristid Lindenmayer and conceived as a mathematical theory of plant development. The central concept of L-systems is that of rewriting based on defining complex objects by successively replacing parts of a simple initial object using a set of rewriting rules.

The essential difference between formal grammars and L-systems is the method of applying rules. In the case of L-systems, we do parallel substitution – all letters in a word are changed at the same time. The biological motivation for developing and researching L-systems is an intention to help describe the cells' division in multi cellular organisms where many divisions are happening simultaneously.

In this work the problem of synthesis of the simplest class of L-systems – DOL-systems has been discussed, based on the given growth function and it has been proven that if we know some growth function, we can easily find an L-system which defines it and the array determined by that function. We established a method for the synthesisis based on the L-system formula – a concept we introduced in order to denote the connection between the $(n + k)$th member of the DOL-system sequence through the sum of k previous members of that sequence, as well as the words from other sequences generated by known DOL-systems. With this method, we showed the algorithm for synthesis polynomial functions with natural coefficients.