Ana Stanojević i Aleksandra Nerandžić

Fraktalna dimenzija potpisa

Ideja rada je ispitati hipotezu da li je fraktalna dimenzija falsifikovanog potpisa veća od fraktalne dimezije originalnog potpisa i utvrditi statistički značajnost dobijenih rezultata. Metodom pokrivanja (box-counting) određujemo kolika je fraktalna dimenzija potpisa za pokrivanje sa N kvadratića stranice ε. Potpisi su skenirani u crno-belom formatu i preneti u matricu nula i jedinica. Korišćenjem programa u matlabu obrađene su matrice potpisa koje su dale fraktalnu dimenziju kao rezultat. Dobijeni podaci obrađeni su statistički. Rezultati su pokazali da pretpostavka ne važi, čak se pokazalo da je u većini slučajeva fraktalna dimenzija originalnog potpisa veća.

Uvod

Matematika koja je u osnovi fraktala je počela da poprima svoj oblik još u 17. veku u razmatranjima matematičara i filozofa Lajbnica. Nakon toga su se mnogi matematičari kao što su Vajerštras, Koh i Kantor, interesovali za ovakvu vrstu istraživanja. Napokon 1975. godine francuski matematičar Benoa Mandelbrot (Benoit Mandelbrot) upotrebio je reč „fraktal" da označi objekat kome je Hauzdorfova dimenzija veća od topološke. Uz pomoć računara dobio je zadivljujuću vizuelizaciju, kakvoj matematičari pre njega nisu imali prilike da prisustvuju. Sam naziv fraktal potiče od latinske reči *fractus*, što znači razlomljen, polomljen, slomljen. Nadahnuće za istraživanje fraktalne dimenzije potpisa dala je serija „Brojevi" („Numbers"). Pretpostavljeno je da hipoteza ima smisla jer se mastilo na nekim mestima više razliva kod falsifikata nego kod originala jer ga ispisuje nesigurna ruka.

Fraktalna dimenzija

Definišimo najpre pojam fraktalne dimenzije.

Definicija 1. Fraktali su skupovi tačaka čija je Hausdorfova dimenzija strogo veća od topološke.

Definicija 2. Prekrivanje C je skup svih otvorenih objekata koji zajedno prekrivaju zadati objekat.

Definicija 3. Za topološki prostor X kažemo da je dimenzije n, ako je n najmanji broj za koji važi da za svako prekrivanje C postoji „finije" prekrivanje C' u kojem se svaka tačka iz X nalazi u najviše $n+1$ skupova unutar C'.

Topološka dimenzija je uvek nenegativan ceo broj.

Objekti u prostoru su u najvećoj meri nepravilnog oblika, tj. fraktalne prirode. Topološka dimenzija ne daje odgovor o broju stepena slobode kod takvih objekata. Iz tog razloga uveden je pojam fraktalne dimenzije.

Definicija 4. Fraktalna dimenzija je broj koji kazuje u kojoj meri neki objekat ispunjava prostor u kome se nalazi. Naziva se još i razlomljenom dimenzijom, jer ne mora biti ceo broj.

Računanje fraktalne dimenzije potpisa

Boks kaunting (Box-counting) dimenzija

Boks kaunting dimenzija je fraktalna dimenzija definisana za šire skupove objekata (ne samo za fraktale). Ideja je opisati nepravilan objekat na način na koji definišemo pravilne.

Ana Stanojević (1993), Niš, Jelašnička 3B, učenica 2. razreda Gimnazije „Svetozar Marković" u Nišu

Aleksandra Nerandžić (1992), Kraljevo, Izletnička 37, učenica 3. razreda Gimnazije u Kraljevu

Posmatrajmo jediničnu duž, jedinični kvadrat i jediničnu kocku. Za datu duž dužine s potrebno je $1/s^1$ takvih duži za pokrivanje date duži. Analogno biće potrebno $1/s^2$ kvadrata stranice s za pokrivanje većeg kvadrata, a za pokrivanje kocke – $1/s^3$ manjih kocki (stranice dužine s).

Eksponenti 1, 2 i 3 u gore navedenim primerima su od suštinskog značaja, jer predstavljaju dimenziju navedenih objekata.

Definicija 4. Neka je S neki skup, za svaki realan broj $\varepsilon > 0$, N je minimalan ceo broj kvadrata stranice ε potrebnih za pokrivanje skupa S. Ako pri tom postoji broj d tako da važi $N \sim 1/\varepsilon^d$, $\varepsilon \to 0$, kažemo da broj d predstavlja boks kaunting dimenziju datog skupa.

Teorema 1. Boks kunting dimenzija postoji ako i samo ako postoji pozitivna konstanta k koja zadovoljava uslov da je $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{N}{1/\varepsilon^d} = k$.

Kako mora da važi $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{N}{1/\varepsilon^d} = k$ i obe strane jednačine su pozitivne važi i:

$$\log\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{N}{1/\varepsilon^d}\right) = \log k,$$

odnosno,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\log N + d \cdot \log \varepsilon) = k,$$

tj.

$$d = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log k - \log N}{\log \varepsilon} = -\lim_{z\to 0} \frac{\log N}{\log \varepsilon}.$$

U poslednjem koraku odstranili smo $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log k}{\log \varepsilon}$ jer je $\log k$ konstanta, $\log \varepsilon$ za $\varepsilon \to 0$ teži beskonačnosti, pa će ovaj limes biti jednak nuli.

Boks kaunting dimenzija datog skupa postoji samo ako postoji limes $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N}{\log \varepsilon}$. U suprotnom postoje viša i niža boks kaunting dimenzija.

Postupak određivanja fraktalne dimenzije potpisa

Boks kauntinig metoda je pogodna za procenu fraktalne dimenzije fotografije. Kako fotografija nije apsolutno veran prikaz objekta, to ovim metodom ne možemo naći apsolutno tačnu vrednost fraktalne dimenzije, već tražimo njenu najbolju aproksimaciju.

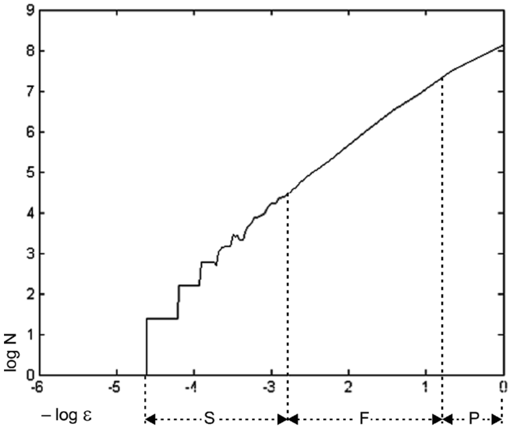
Potpis je skeniran kao crno-bela fotografija. U tom slučaju radimo sa binarnom fotografijom, tj. sa matricom nula i jedinica. Dimenzije matrice određene su brojem piksela po dužini i širini fotografije.

Neka je $A[m,n]$ data matrica (skenirana fotografija), a m i n dimenzije te matrice. Datu matricu „pokrivamo" kvadratima stranice ε i računamo broj takvih kvadrata koji koji sadrže bar jedan crni piksel. Dakle, ispitujemo koliko kvadrata dimenzija $\varepsilon \times \varepsilon$ „pokriva" potpis. Napisan je program u matlabu koji računa taj broj:

```
function d=dimenzija(A,e)
[m,n] = size(A);
i=1;
j=1;
N=0;
while i+e-1<=m
  i1= i*e;
  j=1;
  while j+e-1<=n
    k=i;
    j1=j+e;
    nadjen=0;
    while ((k<i1) && (nadjen==0))
      l=j;
      while ((l<j1) && (nadjen==0))
        if A(k,l) <1
          nadjen =1;
          N=N+1;
        else l=l+1;
        end;
      end;
      k=k+1;
    end;
    j=j+e;
  end;
  i=i+e;
end;
d=N;
end
```

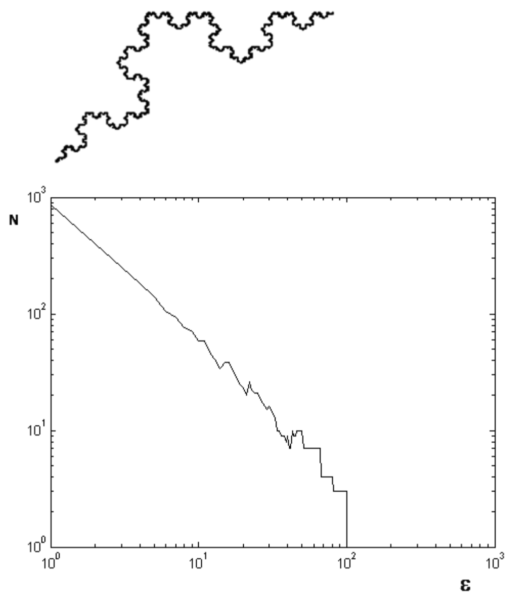
Za računanje fraktalne dimenzije potrebno je naći vrednost limesa $-\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N}{\log \varepsilon}$. Programom smo u zavisnosti od ε za matricu A našli vrednost broja N. Da bismo uspešnije odredili vrednost fraktalne dimenzije potpisa potrebno je bolje razumeti određene delove grafika krive $\log N = d \cdot \log 1/\varepsilon$. Dakle, nagib određenog dela krive predstavljaće fraktalnu dimenziju potpisa (slika 1).

Primetimo da će za određeno ε broj kvadrata za prekrivanje fotografije biti približno jednak $N \sim 1$, tj. u jednom trenutku pokrivanje mora biti sama matrica i vrednost funkcije je tada jedan. Takođe



Slika 1. Izdvajanje segmenta F na osnovu kojeg se računa fraktalna dimenzija (S – kutija reda veličine polazne slike, P – kutija reda veličine piksela)

Figure 1. Detecting segment F used for the calculation of the fractal dimension. (S – the box the dimension of which is approximately a dimension of image that we use, P – the box the dimension of which is approximately a pixel).



Slika 2. Grafik funkcije za fotografiju pahuljice. Izračunata fraktalna dimenzija: 1.262 (fraktalna dimenzija pahuljice: 1.2680).

Figure 2. Graph of the function for the image of the snowflake. Fractal dimension we calculated: 1.262 (fractal dimension: 1.2680).

veličina stranice malog kvadrata može biti jednaka jednom pikselu, tj. $\varepsilon = 1$, pa u ovom slučaju ustvari računamo površinu fotografije. Posmatramo deo krive između dva pomenuta slučaja gde $\varepsilon > 1$ i $N > 0$. Nagib upravo tog dela krive predstavljaće fraktalnu dimenziju slike, odnosno fotografije.

Testiranje

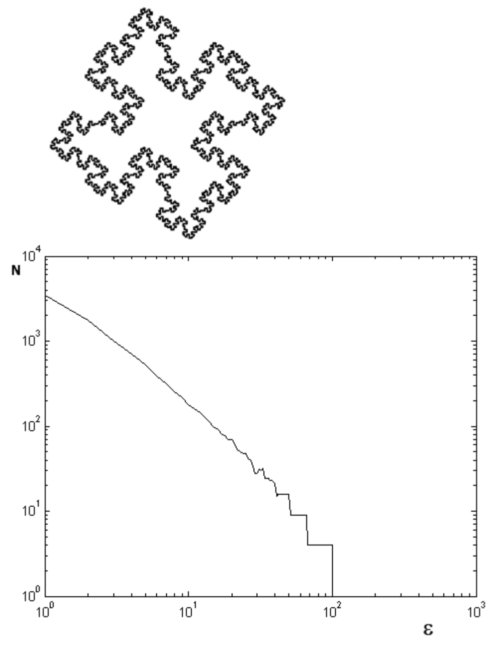
Program je testiran na objektima poznate fraktalne dimenzije. Program računa vrednost približnu vrednosti prave fraktalne dimenziji, pošto je fotografija samo aproksimacija pravog objekta.

Primer 1. Pahuljica (slika 2): fraktalna dimenzija 1.262, izračunata fraktalna dimenzija 1.2680

Primer 2. Kohova kriva (slika 3): fraktalna dimenzija 1.5, izračunata fraktalna dimenzija 1.5091

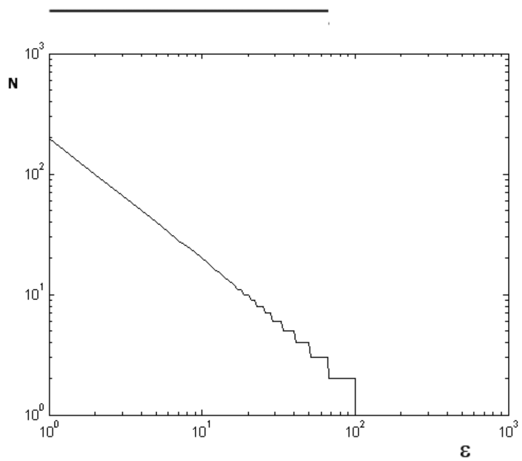
Primer 3. Linija (slika 3): fraktalna dimenzija 1, izračunata fraktalna dimenzija 1.054

Primer 4. Kvadrat (slika 4): fraktalna dimenzija 2, izračunata fraktalna dimenzija 2.04.



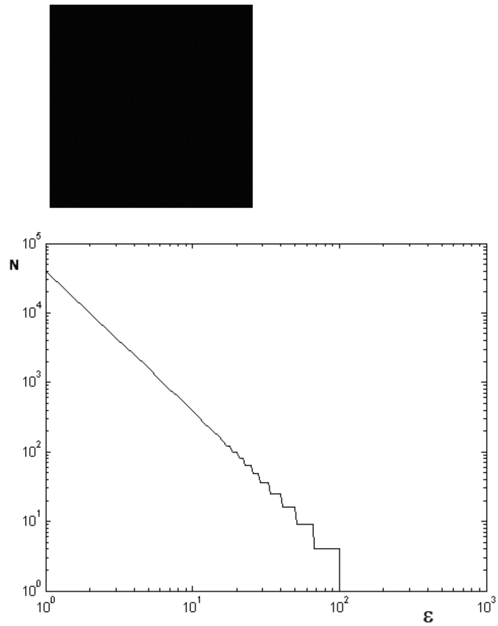
Slika 3. Grafik funkcije za fotografiju Kohove krive. Izračunata fraktalna dimenzija: 1.5091 (fraktalna dimenzija Kohove krive: 1.5).

Figure 3. Graph of the function for the image of the Koch curve. Fractal dimension we calculated: 1.509 (fractal dimension: 1.5).



Slika 4. Grafik funkcije za fotografiju linije. Izračunata fraktalna dimenzija: 1.054 (fraktalna dimenzija linije 1).

Figure 4. Graph of the function for the image of the line. Fractal dimension we calculated: 1.054 (fractal dimension: 1).



Slika 5. Grafik funkcije za fotografiju kvadrata. Izračunata fraktalna dimenzija: 2.04 (fraktalna dimenzija kvadrata: 2)

Figure 5. Graph of the function for the image of the square. Fractal dimension we caclculated: 2.04 (fractal dimension: 2).

Metoda ispitivanja

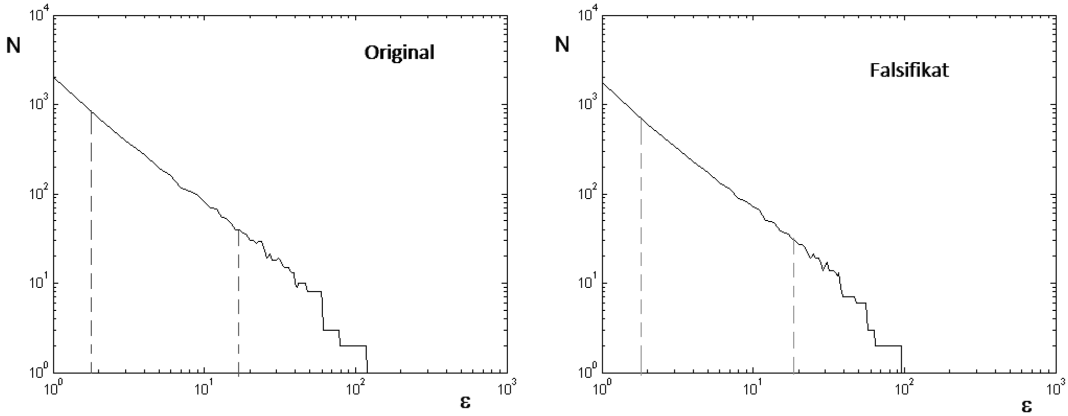
Za potrebe istraživanja prikupljeno je ukupno 400 potpisa – 200 originala i 200 falsifikata. Svoje potpise dalo je 10 ljudi koji su se potpisali 20 puta. Falsifikovalo ih je 20 različitih ljudi i svako od njih falsifikovao je iste potpise. Potpisi su uzimani na beloj hartiji, na koju su se ljudi potpisivali crnim mastilom.

Potpisi su skenirani kao fotografije sa ekstenzijom *.png i nakon toga konvertovane u crno-bele fotografije. Sve fotografije su skenirane tako da budu iste rezolucije. Program je fotografije datih potpisa posmatrao kao matrice nula i jedinica gde su nule predstavljale crne, a jedinice bele piksele. Nakon obrade matrice u datom matlab programu dobijamo broj N u zavisnosti od ε. Grafik koji dobijamo koristimo za računanje fraktalne dimenzije d i to tako što biramo deo grafika koji je približno linearan. U ovom slučaju za sve potpise uzeli smo deo grafika za ε iz intervala (2, 30) piksela. Na slici 6 su prikazani primeri grafika originalnog i grafika falsifikovanog potpisa.

Rezultati i obrada podataka

Dobijene vrednosti fraktalne dimenzije obrađene su pomoću t-testa za nezavisne uzorke. Podaci su obrađeni pojedinačno, tj. za svaki različit potpis. Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli 1. U tabeli varijable sr(f) i sr(0) redom predstavljaju srednje vrednosti fraktalnih dimenzija falsifikata i originala jednog potpisa. Broj p predstavlja nivo značajnosti. st.dev (f) i st.dev(o) su redom standardne devijacije falsifikata i stepen devijacije originala. F predstavlja odnost varijansi za svaki potpis pojedinačno. Razlika je smatrana statistički značajnom ukoliko važi $p < 0.05$.

Rezultati su pokazali da je u 8 slučajeva fraktalna dimenzija falsifikata manja od fraktalne dimenzije originala (sr(f) < sr(o)), što je suprotno našoj polaznoj pretpostavci. Od toga, u 5 slučajeva se ta razlika može smatrati statistički značajnom ($p < < 0.05$). Kod potpisa sa rednim brojem 7 i 9 nivo



Slika 6. Primer grafika za origina (levo) i jedan od njegovih falsifikata (desno)

Figure 6. Graphic of the function for the image of the original (left) and fake (right) signature

značajnosti (p) veći je od 0.05, a kod potpisa sa rednim brojem 3 odnos varijansi izlazi iz intervala (0.4, 2.5), pa se ti rezutati ne smatraju validnim, jer ne ispunjavaju jedan od uslova za primenu testa.

Dobijeno je i da je standardna devijacija fraktalne dimenzije kod falsifikovanih potpisa veća nego kod originalnih potpisa, što znači da oni poseduju veće „rasturanje”

Podaci su takođe posmatrani u celini. Računato je odstupanje dimenzija svih potpisa od onog koji je falsifikovan, pošto je od svakog potpisa falsifikovan samo jedan. Rezultati su prikazani u tabeli 2.

Dobijeni rezultati pokazali su da i u ovom slučaju postoji statistički značajna razlika ($p < 0.05$) i to da je fraktalna dimenzija falsifikata manja nego kod originala, ponovo suprotno hipotezi.

Tabela 1. Dobijene vrednosti fraktalnih dimenzija za falsifikate i originale i značajnost razlike među njima

sr(f)	sr(o)	t	df	p	st.dev(f)	st.dev(o)	F
1.4198	1.4439	2.7422	38	0.01	0.030194	0.025313	1.42
1.3686	1.4224	3.8746	38	0.001	0.045276	0.042362	1.14
1.3960	1.4333	3.7878	38	0.001	0.037810	0.022603	2.79
1.3363	1.3948	4.6181	38	0.001	0.041978	0.037397	1.26
1.3301	1.2950	-2.5551	38	0.02	0.049970	0.035633	1.96
1.3400	1.3663	2.5266	38	0.02	0.038051	0.026910	2.00
1.3426	1.3576	1.2390	38	0.23	0.041818	0.034616	1.46
1.3736	1.3924	1.9229	38	0.06	0.030277	0.031414	1.08
1.3542	1.3720	1.2686	38	0.21	0.049683	0.038041	1.71

Tabela 2. Vrednosti odstupanja od dimenzija potpisa koji su bili falsifikovani

sr(f)	sr(o)	t	df	p	st.dev(f)	st.dev(o)	F
0.005986	0.030905	4.16716	438	0.000037	0.062361	1.022985	0.063074

Zaključak

Ideja rada bila je zasnovana na pretpostavci da se kod falsifikovanog potpisa mastilo na nekim mestima više razliva i da je zato njihova fraktalna dimenzija veća. Rezultati istraživanja pokazali su drugačije: ispostavilo se da je u većem broju slučajeva kod falsifikata fraktalna dimenzija manja nego kod originala. Rezultat da je standardna devijacija kod falsifikovanih potpisa uvek veća nego kod originala je donekle i intuitivno jasan jer potpis nije falsifikovao isti čovek i iz tog razloga falsifikati imaju već rasturanje. Dalje istraživanje moglo bi se izvršiti na većim uzorkom potpisa kao i većem broju različitih ljudi koji će falsifikovati potpise.

Literatura

Dekauir A., Rouai M., Moustier S. 2003. Basalt pore fractal dimension from image analysis and mercury prosoimetry. *Arabian Journal for Science and Engineering*, **28** (1C): 223

Fractal dimension calculator. http://paulbourke.net/fractals/fracdim/

The Box Counting Method. http://tid.uio.no/čeaker/thesis/node55.html

Theiler J. 1990. Estimating Fractal Dimension. *J. Opt. Soc. Am.* A, **7**: 1055.

The math behind numbers. http://numb3rs.wolfram.com/409/demonstrations.html

Ana Stanojević and Aleksandra Nerandžić

Fractal Dimension of the Signature

In this paper a hypothesis that the fractal dimension of a counterfeit signature is bigger than the fractal dimension of an original signature is tested and the statistical significance of the results is determined. Using the “covering” method – box counting method – the fractal dimension of a signature for covering with N squares the dimension e is determined. Signatures are scanned in a black and white and then transformed into a matrix of zeros and ones. Using the matlab program, the fractal dimension of these matrices is determined. The results are processed with a statistical test. The results showed that the hypothesis is not correct. Furthermore, in most cases the fractal dimension of the counterfeit signature is smaller than the fractal dimension of the original signature.