Đorđe Rakić

Alternativni pristup stabilizovanju Markovicevog modela

Prilikom korišćenja Markovicevog modela za konstrukciju optimalnog portfolia, u praksi se često javlja problem koji se ogleda u nestabilnosti rešenja, to jest u mogućnosti jednog istorijskog podatka da bitno promeni optimalni portfolio, što je nepovoljno po investitora, jer to dalje implicira visokim transakcionim troškovima, troškovima održavanja takvog portfolija i slično. U ovom radu je predložen alternativni pristup stabilizovanju Markovicevog modela, koji pored stabilizovanja modela pokazuje bolje karakteristike od drugih transformacija koje imaju slične doprinose. Pristup se zasniva na minimizovanju zbira osnovne Markoviceve funkcije, odnosno varijanse portfolija, i kaznene (penalty) funkcije, koja je u ovom radu srazmerna recipročnoj vrednosti euklidske norme. Kao što je pokazano u radu, ovaj pristup je uvek dobro definisan, što mu je velika prednost u odnosu na ostale metode. Najveći doprinos mu je bolja kontrola broja aktivnih pozicija u portfoliju. Ovim pristupom stabilizovanja Markovicevog modela ostvaruje se značajna stabilnost celog portfolija, čime se bitno umanjuju i transakcioni troškovi.

1. Uvod

Skup svih hartija od vrednosti koje investitor poseduje se naziva portfolio. Svaki portfolio je definisan svojim rizikom i prinosom. Investitor se trudi da na neki način nađe optimalni portfolio, to jest portfolio koji za određen prinos postiže najmanji mogući rizik. Hari Markovic (Harry Markowitz) se bavio ovim problemom i kasnije je za doprinos u ovom polju dobio Nobelovu nagradu. On se smatra osnivačem moderne teorije portfolija (eng. Modern portfolio theory – MPT), čija je suština u konstruisanju optimalnog portfolija.

U radu će biti posmatrani isključivo portfoliji koje čine samo deonice. Međutim, nije problem sve što je prikazano uopštiti na sve oblike hartija od vrednosti.

U ovom poglavlju će biti predstavljeno matematičko zasnivanje Markovicevog modela, kao i problem koji nastaje pri takvom zasnivanju, o kome će biti više reči u radu.

Đorđe Rakić (1992), Beograd, dr Aleksandra Kostića 14, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: dr Miloš Božović, Centar za investicije i finansije, Beograd

1.1. Markovicev model

Uvedimo neke od osnovnih oznaka. Za početak, neka investitor ulaže sredstva u N različitih deonica. Investitor raspolaže sa T istorijskih podataka o svakoj deonici i samo na osnovu njih procenjuje novoočekivanu cenu svake od deonica. Neka je R matrica prinosa, dimenzija $(T-1) \times N$. U njoj svaki element r_{ij} predstavlja prinos deonice j u trenutku i u odnosu na trenutak $(i-1)$. Ova matrica ima manje dimenzije u odnosu na matricu cena, zato što za poslednji podatak ne postoji raniji podatak u odnosu na koji bi bio računat prinos date deonice. Posmatraćemo i vektor dimenzije $N \times 1$, gde je svaki element tog vektora novoočekivani prinos odgovarajuće deonice. Ovaj vektor ćemo obeležiti sa μ. Uvešćemo još vektor ω dimenzija $\mathrm{N} \times 1$, koji predstavlja investitorov portfolio. Svaki element ovog vektora predstavlja deo početnog kapitala uloženog u odgovarajuću deonicu. Svaki od elemenata ovog vektora je manji do jednak od 1 i svi elementi u zbiru daju 1. Definišimo još i matricu Σ dimenzija $N \times N$. Ova matrica se naziva matrica kovarijansi. Svaki element ove simetrične matrice predstavlja kovarijansu između odgovarajućih deonica, odnosno, svaki element matrice Σ je $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(i, j)$, kovarijansa između deonice i i j.

Koristeći ove oznake, možemo matematički zapisati očekivanu vrednost portfolija, $\mu_P = \omega^{\mathrm{T}} \mu$, dok je rizik varijansa portfolija. Varijansa se računa po formuli $\sigma_P^2 = \omega^{\mathrm{T}} \Sigma\, \omega = \mathrm{Var}\,(R_P)$

Markovic je model zasnovao na sasvim intuitivnoj ideji. Njegov model minimizuje rizik, dok zahteva određen prinos. Uključujući i ograničenja, model se može predstaviti na sledeći način:

$$\min_{\omega} \mathrm{Var}\,(R_P) = \omega^{\mathrm{T}} \Sigma\, \omega$$

pod uslovima:

$$\mu_0 = \omega^{\mathrm{T}} \mu$$

$$\omega^{\mathrm{T}} \mathbf{1} = 1 = 1$$

Ovde je μ_0 broj koji predstavlja traženu dobit portfolija, a **1** vektor dimenzija $1 \times N$ čiji su svi elementi jedinice. Prvo ograničenje nam garantuje da će biti ostvareni željeni prinosi, dok drugo ograničenje garantuje da su sva početna sredstva uložena.

1.2. Problem

Rešimo Markovicev model, tj. nađimo sve vektore ω koji zadovoljavaju navedene uslove. Prikazan je samo rezultat, jer izvođenje i dokaz prevazilaze obime rada. Kompletan dokaz se nalazi u Fabozzi *et al.* (2007).

$$\omega = g + h\, \mu_0$$

gde je:

$$g = \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \left[c\mathbf{1} - by \right]$$

$$h = \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \left[a\mu - b\mathbf{1} \right]$$

a a, b i c su zadati:

$$a = \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} K$$

$$b = \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} \mu$$

$$c = \mu^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} \mu /$$

Problem se javlja u tome što inverzna matrica nije dovoljno stabilan, tj. jedan novi istorijski podatak ima moć da veoma promeni matricu kovarijansi, samim tim i njenu inverznu matricu. Kako celo rešenje zavisi od inverza matrice kovarijansi, to je jako nepovoljno po investitora, jer model ne daje za dva susedna dana slične rezultate, već neretko veoma varira. U praksi, ovo je jako veliki problem, jer onda takav model zahteva dosta česta ažuriranja. Takođe, ako je korelacja između dve proizvoljne deonice jako visoka, matrica kovarijansi teži singularnoj, to jest, determinanta joj teži nuli, što je jako problematično pri konstruisanju inverza matrice kovarijansi, jer on zavisi od recipročne vrednosti determinante matrice kovarijansi.

Rešenje direktno zavisi od inverza matrice kovarijansi. Samim tim, što je matrica kovarijansi dijagonalnija, to je rešenje stabilnije.

1.3. Aktivni ponderi

Pošto je portfolio predstavljen kao vektor ω, svaki ponder (element) ovog vektora predstavlja deo ukupnog početnog kapitala uložen u zadatu deonicu. Aktivni ponderi su oni ponderi koji sadrže nenulti broj deonica. Međutim u praksi, ovo je malo drugačije. Često se za deo početnog kapitala koji ponder pokazuje ne može kupiti ceo broj deonica, tako da je Markovicev optimalni portfolio jako redak u realnom životu, jer će se za udele svake deonice u portfolio jako retko (gotovo nikada) moći kupiti ceo broj deonica.

1.4. Prodaja na kratko

Prodaja na kratko (eng. short-selling, going short) je proces u kome ulagač trguje hartijama od vrednosti koje ne poseduje. On te hartije od vrednosti pozaljmljuje od nekog drugog investitora, kojem planira da na kraju određenog vremenskog intervala vrati istu količinu istovetnih hartija od vrednosti. Investitor profitira tako što ulagač prodaje sve pozajmljene hartije od vrednosti i na kraju određenog intervala kupuje iste. Pri tome on očekuje da će od razlike u ceni profitirati. Za ovo korišćenje hartija od vrednosti je po dogovoru ponekada potrebno platiti novčanu nadoknadu vlasniku hartija od vrednosti.

Jednostavnije rečeno, investitor pozajmljuje novac od drugog investitora, samo što se pozajmica vrši u deonicama. Investitoru koji na taj način pozajmljuje novac se ovo može isplatiti, jer on očekuje promenu u ceni koja će biti povoljnija za njega nego za investitora od koga je pozajmio deonice.

Dva su problema korišćenja prodaje na kratko. Prvi se ogleda u tome što investitori koji učestvuju u ovom procesu nemaju nikakave obavezne transak cione troškove, pa samim tim ni berza ni država ne profitiraju od berzanskog poslovanja. Drugi problem je to što ulagač koji koristi prodaju na kratko profitira od smanjenja cene deonice. To često na berzi dovodi do veštačkog snižavanja cena. Zato je na mnogim svetskim berzama prodaja na kratko zabranjena. Matematički gledano to znači da svaki element vektora ω mora biti veći ili jednak od nule.

Deonice u portfoliju koje su negativne, to jest koje su pozajmljene se nazivaju kratke pozicije (eng. short positions).

1.5. Sparsovanje matrice kovarijansi

Sparsovanje (sparsity) predstavlja investitorovo ograničenje. Sparsovanjem se postiže da se svaki ponder optimalnog portfolija koji je jako mali dodatno smanji, tako da jako mali ponderi portfolija postaju približno nule. Jako mali ponderi su oni koji nemaju dovoljan deo početnog kapitala da bi se njima mogao kupiti minimalan broj deonica. Investitor sam odlučuje koji su ponderi nedovoljno veliki. Maksimalno sparsovan portfolio je onaj koji ima samo jedan ponder različit od nule, to jest portfolio od samo jedne vrste deonica.

Ovakav rezultat se dobija delovanjem na matricu kovarijansi. Teži se tome da matrica kovarijansi bude što dijagonalnija, tako da se smanji broj aktivnih deonica u portfoliju.

Odavde zaključujemo da je jedna od glavnih prednosti rada sa sparsovanim portfoliom smanjenje broja aktivnih deonica. U praksi je jako teško održavati portfolio od više stotina deonica, međutim, sparsovanjem takvog portfolija, on se može svesti na novi portfolio sa samo nekoliko najaktivnijih deonica. Ovakav sparsovan portfolio ne može biti optimalan kao originalni portfolio, međutim, kako je i originalni portfolio u realnom životu retko optimalan (teško je naći portfolio sa ponderima koji svi predstavljaju ceo broj deonica) onda sparsovan portfolio ne mora biti mnogo manje optimalan od originalnog portfolija koji sparsujemo.

Takođe, kako u osnovnom Markovicevom modelu nije računato na troškove održavanja velikog portfolija, sparsovanjem Markovicevog modela se i taj problem smanjuje i moguće ga je kontrolisati.

1.6. Referentni portfolio

Referentni (benchmark) portfolio predstavlja veštački konstruisan portfolio u cilju poređenja sa investitorovim portfoliom. On služi kao mera uspe šnosti investitorovog portfolija. Konstrukcija referentnog portfolija se može uraditi na više načina.

Prvi način je konstruisati portfolio koji čine deonice čiji se ponderi odnose jedan prema drugom kao njihove vrednosti na berzi (value-weighted portfolio).

Drugi način je konstruisti jednako otežinjeni (equal-weighted portfolio). Svaki ponder ovog portfolija čini tačno ($1/N$)-ti deo portfolija. Zbog toga se ovaj portfolio još i naziva $1/N$ portfolio. Po DeMiguel *et al.* (2009) ovaj portfolio je veoma teško prevazići na duže vremenske periode. Takođe, ovaj portfolio je interesantan jer je veoma lak za implementiranje.

1.7. Šarpov odnos

Šarpov odnos (eng. Sharpe's ratio) je realan broj koji predstavlja efikasnost portfolija ili deonice uopšte. Ovaj odnos je zadat kao količnik viška dobiti i varijanse portfolija odnosno deonice koju posmatramo. Pod viškom dobiti se podrazumeva razlika očekivane dobiti portfolija i bezrizične hartije od vrednosti. U radu će biti korišćen Šarpov odnos za merenje uspešnosti portfolija. Veći odnos predstavlja portfolio sa većim viškom dobiti i/ili manjom varijansom, pa je očigledno zašto su po ulagača povoljnije veće vrednosti ovog odnosa.

1.8. Transakcioni troškovi

Transakcioni troškovi predstavljaju troškove koje investitor ima prilikom trgovanja hartijama od vrednosti. Ovi troškovi se ogledaju u proviziji koju agent mora da plati brokeru, državi i sličnim izdacima, pri svakoj izvršenoj transakciji na berzi. Moguće je da ovi troškovi prevaziđu prinose portfolija, što ne odgovara investitoru. Pri korišćenju osnovnog Markovicevog modela investitor nema kontrolu nad transakcionim troškovima.

2. Šrinkidž metod

Šrinkidž metod (eng. shrinkage metod) stabilizuje Markovicev model tako što stabilizuje matricu kovarijansi. Umesto matrice kovarijansi, Ledoit i Wolf (2003) preporučuju šrinkovanu matricu. Šrinkovana matrica je kombinacija dve matrice, od kojih je jedna matrica kovarijansi, a druga ciljna šrinkovana matrica. Pravi se kombinacjija ove dve matrice baš zato što nijedna sama nije odgovarajuća, tj. zajedno pokazuju bolje rezultate.

Krajnju šrinkovanu matricu, koja zamenjuje matricu kovarijansi, dobijamo po formuli:

$$\Sigma_{\text{Shrink}} = \lambda F + (1 - \lambda)\,\Sigma$$

λ je slobodni parametar koji se naknadno određuje, kao i matrica F.

2.1. Šrinkidž matrica

U ovom delu rada će biti objašnjeno kako se konstruiše šrinkidž matrica. Posmatrajmo matricu kovarijansi Σ. Svaki element ove matrice je σ_{ij}. On predstavlja kovarijansu između elemenata i i j. Računa se po formuli:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}\ .$$

Slobodni parametar ρ se naziva slobodni parametar korelacije. Šrinkovana matrica je takva da su sve vrednosti koeficijenata korelacije međusobno iste, i predstavljaju aritmetičku sredinu svih koeficijenata korelacije. To znači da je $f_{ij} = \bar{\rho}\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}$ i $f_{ii} = \sigma_{ii}$, gde je f_{ij} element matrice F, a

$$\bar{\rho} = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\rho_{ij}\,.$$

2.2. Slobodni parametar

Sam način dobijanja slobodnog parametra je poprilično kompleksan I dugačak, te samim tim izlazi iz obima ovoga rada. Kompletan dokaz I izvođenje se mogu pronaći u Ledoit i Wolf (2003). Bitno je izdvojiti da je na ovaj način postignuto da vrednost slobodni parametar λ pripada segmentu $[0, 1]$.

3. Kaznena (penalty) funkcija

U ovom poglavlju će biti predstavljen drugi način stabilizovanja Markovicevog modela. Ovaj način su predstavili Brodie *et al.* (2008).

Kako je predloženo, na osnovnu formu Markovicevog modela, treba dodati još l_1 meru. Ova mera se još naziva i kaznena (eng. penalty) funkcija. Što su rešenja minimizacije stabilnija, to ova funkcija ima manje vrednosti. Ova mera je funkcija po jednoj promenjivoj, ω. Po njima Markovicev model se svodi na minimizovanje funkcije:

$$\min_{\omega}\ \omega^{T}\Sigma\,\omega + \tau\,\|\omega\|_1$$

Gde uslovi osnovnog Markovicevog modela nisu promenjeni, to jest i dalje su:

$$\mu_0 = \omega^{T}\mu$$

$$\omega^{T}\mathbf{1} = 1$$

Ovde je $\| \omega \|_1$ definisano kao suma apsolutnih vrednosti svakog od elemenata vektora ω, tj.:

$$\| \omega \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | \omega_i |$$

Posmatrajmo dodati deo, $\tau \| \omega \|_1$. Slobodni parametar τ je takav da se može podešavati u zavisnosti od investitora. Što je veći slobodni parametar τ, to će kaznena funkcija biti veća, tj. imaće više uticaja. U slučaju kada je prodaja na kratko dozvoljena, ovaj model zaista stabilizuje osnovni Markovicev model. Tada je koeficijentom fi moguće kontrolisati broj aktivnih deonica, kao i broj kratkih (short) pozicija. Manjim modifikacijama je takođe donekle moguće i kontrolisati promene portfolia, kao i transakcione troškove. Međutim, kada je prodaja na kratko (short-selling) zabranjena, ovo nije slučaj.

Kao što smo već rekli na većini svetskih berza prodaja na kratko je zabranjena. To dovodi ovaj model u problem. Posmatrajmo ovaj pristup u slučaju kada je prodaja na kratko (short-selling) dozvoljen. Nije problem uvideti da se model svodi na minimizovanje sledeće funkcije:

$$\omega^T \Sigma \, \omega + \tau + 2\tau \sum_{i,\, i:\, \omega_i < 0} | \omega_i |$$

pod istim uslovima.

U slučaju kada je prodaja nakratko (short-selling) zabranjen, poslednji član ove funkcije ne postoji, a sam slobodni parametar τ ne utiče na minimizaciju po ω, tako da se ceo kompleksan model svodi na minimizaciju početnog Markovicevog modela. To znači da u slučaju kada je prodaja na kratko (short-selling) zabranjena, pristup koji su predložili Brodie *et al*. (2008) ne menja osnovnu Markovicevu funkciju. Kako u tom slučaju ni u jednom delu nije drugačiji od originalne Markoviceve funkcije, on tada ne donosi nikakve benefite u odnosu na osnovni Markovicev model.

4. Alternativni pristup stabilizovanju Markovicevog modela

Da bi otklonili nedostatak metoda kada je prodaja na kratko (short-selling) zabranjena moramo uvesti takvu normu koja ne svodi kaznenu funkciju na osnovni Markovicev model u slučaju kada je prodaja na kratko (shortselling) zabranjena, što je najčešći slučaj na berzama širom sveta. Osnovni problem u konceptu kaznene funkcije se pojavljuje kada je vrednost norme nula. Kao alternativa se uvodi sasvim logična i intuitivna norma, euklidska norma. Međutim, zbog samih zahteva penalty funkcije, moramo uzeti recipročnu vrednost Euklidske norme, to jest, ovaj model predlaže minimizovanje funkcije:

$$\min_{\omega} \omega^{T}\Sigma\,\omega + \tau\,\frac{1}{\|\omega\|_1}$$

pod uslovima:

$$\mu_0 = \omega^{T}\mu$$

$$\omega^{T}\mathbf{1} = 1$$

Dakle, ovde je

$$\|\omega\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2},$$

a τ varijabilni slobodni parametar. Ovako definisana norma može imati vrednosti od 1 do $\sqrt{N}$. Vednost 1 se postiže kada je u vektoru ω samo jedan ponder različit od nule, a $\sqrt{N}$ kada je u svaku deonicu uloženo po $1/N$. Minimizacija će tražiti minimum kako za novu kaznenu funkciju, tako i za varijansu, pa će birati između ulaganja u samo par deonica i ravnomernog ulaganja u deonice. Posmatrajmo ekstremni slučaj, tj. da je $\|\omega\| = 1$. U tom slučaju, kaznena (penalty) funkcija ima vrednost fi što u minimizaciji ne dovodi do poboljšanja osnovnog Markovicevog modela. Međutim, kao što je već navedeno, vrednost $\|\omega\| = 1$ se postiže samo u slučaju kada su svi ponderi, sem jednog, jednaki nula. Ovakav portfolio je već maksimalno sparsovan, tj. već je maksimalno stabilan.

Takođe, potrebno je napomenuti da $\|\omega\|$ nikada ne može dostići vrednost 0, pa je ovaj model uvek definisan. Nemoguće je dostići nulu zato što je ukupan zbir svih pondera 1, a $\|\omega\|$ je koren sume kvadrata svih pondera, koja bi bila jednaka nula samo u slučaju da su svi ponderi jednaki nuli, a to je nemoguće jer u tom slučaju njihov zbir ne zadovoljava uslov da je njihov zbir 1.

To znači da ovako postavljen model zadovoljava uslove kaznene (penalty) funkcije, to jest da je teorijski ispravan, a kako je u slučaju kada je shortselling dozvoljen ovaj model i dalje važeći (ništa se u samom modelu ne menja), to znači da je model bolji od modela koji su predlozili Brodie *et al.* (2008). Ovo tvrđenje je prošireno empirijskim rezultatima u sledećem poglavlju.

Vrednost člana $\frac{1}{\|\omega\|}$ pripada segmentu $[1,\sqrt{N}]$. Kako funkcija minimizuje i ovaj član, ona će težiti da postavi vrednost ovog člana minimalnoj, to jest što je moguće bliže 1. To znači da je očekivano rešenje sa više pondera koji po apsolutnoj vrednosti teže nuli. Stoga, broj aktivnih pondera u zavisnosti od τ može varirati.

4.1. Kontrola transakcionih troškova

Ovim pristupom moguće je kontrolisati transakcione troškove kako oni ne bi imali veću vrednost od prinosa portfolija. Kako ovakav pristup stabilizuje Markovicev model, to su i variranja udela svakog od pondera u portfoliju manja, te takav portfolio zahteva manje transakcione troškove. Ovo unapređenje je jako bitno. Za razliku od osnovnog Markovicevog modela i modela šrinkovane matrice kovarijansi, ovde prikazan pristup omogućava agentu da kontroliše transakcione troškove. Kao što je već navedeno u realnom životu je moguće da troškovi budu veći od prinosa, tako da investitor može imati negativne prihode. Korišćenjem ovog prinosa agent dobija mogućnost da nađe sebi odgovarajući portfolio koji je karakterisan željenim odnosom između rizika portfolija i visine transakcionih troškova. Biranjem većeg slobodnog parametra τ, agent daje veću važnost niskim transakcionim troškovima i obrnuto, biranjem manjeg slobodnog parametra τ, agentu je manje bitna visina transakcionih troškova.

4.2. Modifikacija već napravljenog portfolija

Kada se investitor nalazi u situaciji u kojoj već poseduje optimalni portfolio ω, a u međuvremenu je dobio još istorijskih podataka, očekivano je da će novi optimalni portfolio biti drugačiji od ω, to jest, on mora da napravi promenu $\Delta\omega$. Moguće je modifikovati optimalni portfolio ω koristeći model prezentovan u ovom radu, tako da promena bude što manja, a da portfolio bude što bliže optimalnom. U tom slučaju, model izgleda:

$$\min_{\Delta\omega} (\omega + \Delta\omega)^T \Sigma (\omega + \Delta\omega) + \tau \frac{1}{\| \omega + \Delta\omega \|}$$

pod uslovima:

$$(\Delta\omega)^T \mu = 0$$

$$(\Delta\omega)^T \mathbf{1} = 0$$

Prvi uslov nam garantuje da će željena dobit ostati ispunjena kao i kod početnog optimalnog portfolija, dok nam drugi uslov garantuje da će novi portfolio i dalje imati zbir svih pondera 1. Većim vrednostima slobodnog parametra τ, agent postiže da su promene sve manje, i obrnuto, manjim vrednostima slobodnog parametra τ agent dobija optimalniji portfolio, koji je me.utim nestabilniji.

4.3. Kontrola prodaje na kratko

U prethodnom delu rada je pokazano da se ovim modelom može varirati broj aktivnih pondera. Model važi i kada je prodaja na kratko (short-selling) dozvoljena, tako da njegovim korišćenjem investitor može varirati broj aktivnih pondera. Ovakvim variranjem se može uticati na pondere male po apsolutnoj vrednosti da postanu još manji, odnosno neaktivni. Tako će se i mali negativni ponderi (koji su short) deaktivirati, to jest, smanjiće se broj akcija koje su kratke (short), odnosno investitor dobija moć da kontroliše koliki deo portfolija predstavljaju pozajmljene (short) akcije.

5. Empirijsko poređenje

U empirijskom delu rada su dodatno objašnjeni benefiti prikazanog modela, kao i uslovi poređenja novog modela sa već postojećim modelima.

Modeli. U empirijskom delu rada su poređeni svi prikazani modeli stabilizovanja osnovnog Markovicevog modela, uključujući i sam Markovicev model. Dakle, svi podaci su korišćeni za pravljenje osnovnog Markovicevog modela, modela shrinkovane matrice kovarijansi, kaznene (penalty) funkcije kao i modela prikazanog u ovom radu.

Slobodni parametar kaznene funkcije. Slobodni parametar τ je variran u starom i novom modelu kaznene (penalty) funkcije kako bi se pokazala zavisnost broja aktivnih deonica od slobodnog parametra τ.

Vremenski interval. Kao početni trenutak je uzet momenat od pre tačno godinu dana. Od tada je na svaka dva meseca ažuiran prethodni portfolio. Napravljeno je ukupno 6 portfolija na tom vremenskom intervalu, te su ti podaci korišćeni za istraživanje. Cilj je bio pokazati koliko podaci (svaki put po novih 2 meseca podataka) deluju na novi portfolio.

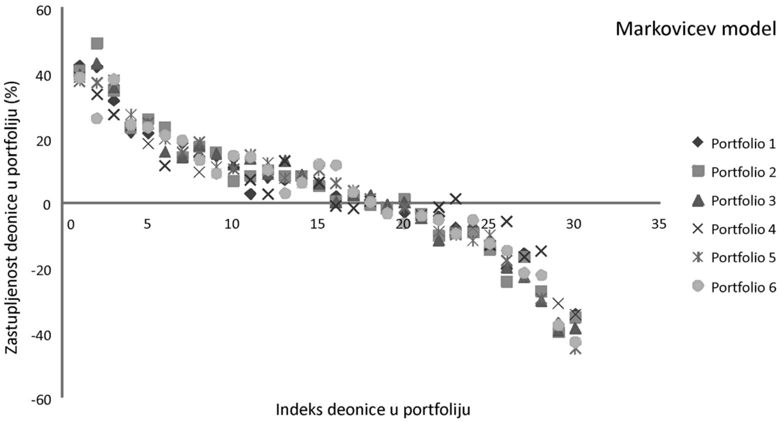
Podaci. Korišćeni su podaci sa dve berze, Belex-a i Dow Jones-a. Sa Belexa je posmatrano zadnjih 730 istorijskih dnevnih podataka, dok je sa Dow Jones-a broj istorijskih podataka bio znatno duži i iznosio je 2337. Grupu podataka sa Beogradske berze čini 15 najlikvidnijih akcija koje pripdaju indeksu Belex, dok drugoj grupi podataka pripada 30 akcija koje čine DowJones indeks.

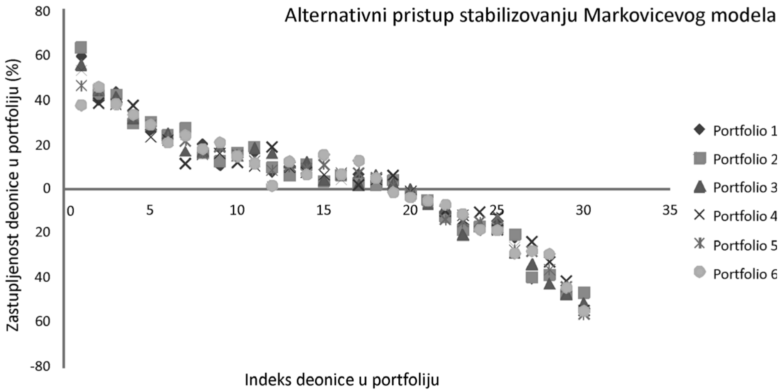
Prodaja na kratko (short-selling). Posmatraćemo sve varijacije na slučaju kada je prodaja na kratko (short-selling) dozvoljen i kada je zabranjen. Rezultati će biti podeljeni u zavisnosti od toga. U slučaju kada je prodaja na kratko (short-selling) zabranjena model kaznene (penalty) funkcije se svodi na osnovan Markovicev model. To znači da ćemo porediti samo modele osnovnog Markovica, šrinkovane matrice i modela predloženog u ovom radu.

Referentni portfolio. Kao referentni portfolio je korišćen jednako otežinjeni (equally weighted) portfolio. U prvoj grupi podataka svaka deonica je činila tačno 1/15-ti deo portfolija, dok je u drugoj grupi svaka deonica činila tačno 1/30-ti deo portfolija. Tako je za svaku željenu dobit (μ_0) data vrednost onolika koliku dobit ostvaruje benchmark portfolio na tom periodu. Koristeći ovu metodologiju, konsruisan je širok spektar portfolija. Slede dva primera, za DowJones i Belex indekse.

5.1. Primer 1: Dow Jones

Prvi set podataka čini 30 najlikvidnijih deonica američkih kompanija koje ulaze u sastav Dow Jones indeksa. Korišćeni su javni podaci preuzeti sa sajta www.djindexes.com, u periodu od 2. jula 2001. godine do 1. oktobra 2010. godine. Kao početni trenutak je korišćen baš 2. juli 2001, jer je to prvi berzanski radni dan u kome su u trgovanju učestvovali svih 30 deonica koje trenutno čine Dow Jones indeks.



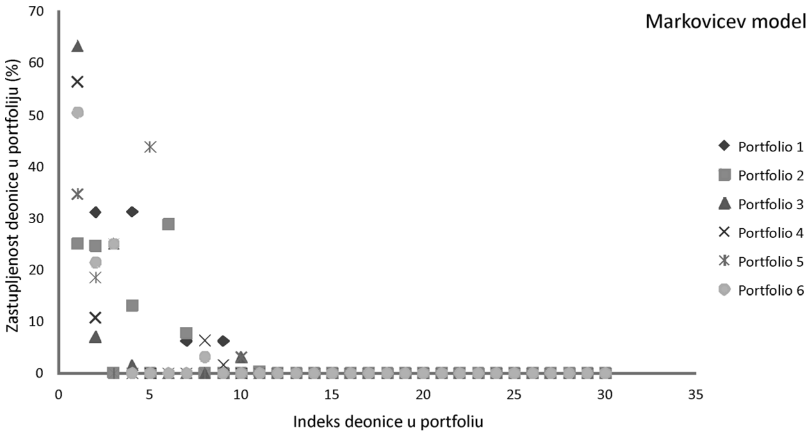


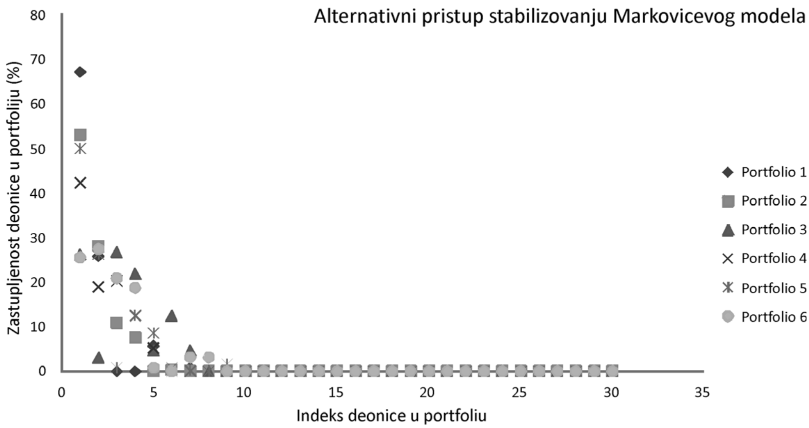
Slika 1. Primer stabilizovanja osnovnog Markovicevog modela bez ograničenja za kupovinu na kratko. Na horizontalnoj osi je prikazan indeks posmatrane deonice u portfoliju, dok je na vertikalnoj osi prikazana procentualna zastupljenost te deonice.

Figure 1. Example of basic Markowitz's model stabilization with allowed short selling. Horizontal axis represents index of specific share in the portfolio, while vertical axis represents its weight in the portfolio.

Napravljeno je ukupno šest portfolija počevši od 3. maja 2010. godine, kako osnovnim Markovicevim modelom, tako i ostalim modelima prikazanim u ovom radu.

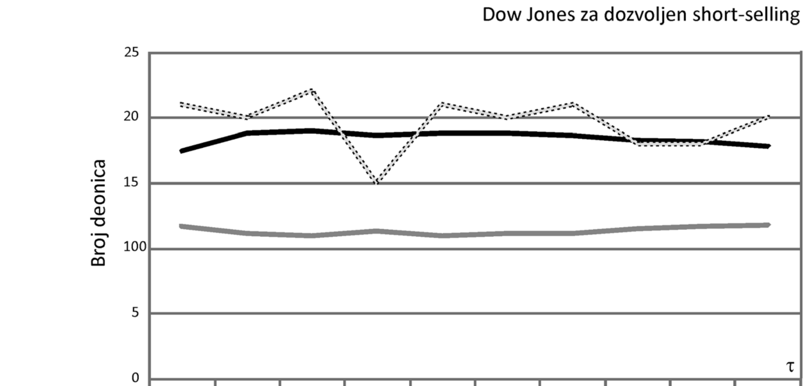
Grafik na slici 1 prikazuje kako alternativni pristup prikazan u ovom radu zaista stabilizuje osnovni Markovicev model bez ikakvih ograničenja. Grafik na slici 2 predstavlja istu situaciju, samo kada sa ograničenjem na zabranjenu prodaju na kratko (no short-selling).





Slika 2. Primer stabilizovanja Markovicevog modela za slučaj kada je prodaja na kratko (short-selling) zabranjena. Horizontalna osa – indeks posmatrane deonice u portfoliju, vertikalna osa – procentualna zastupljenost te deonice.

Figure 2. Example of basic Markowitz's model stabilization without short selling. Horizontal axis represents index of specific share in the portfolio, while vertical axis represents its weight in the portfolio.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aktivne deonice	17.50	18.3	19.00	18.67	18.83	18.83	18.67	18.33	18.17	17.83
Short pozicije	11.67	11.17	11.00	11.33	11.00	11.17	11.17	11.50	11.67	11.83
Manje variranje	21.00	20.00	22.00	15.00	21.00	20.00	21.00	18.00	18.00	20.00

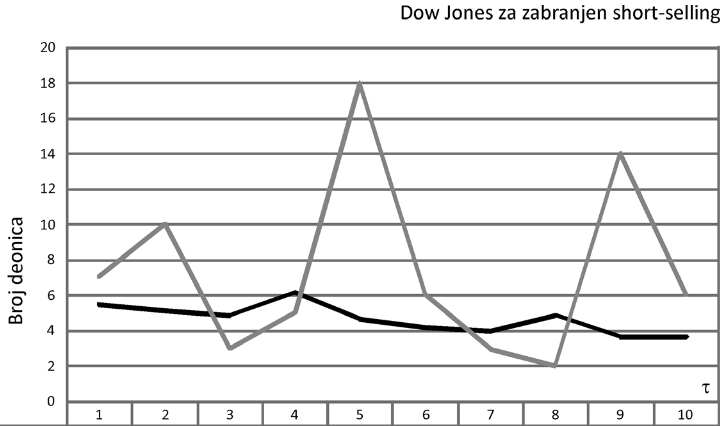
Slika 3. Dow Jones za dozvoljen short-selling. Variranjem slobodnog parametra kaznene funkcije τ (horizontalna osa) moguće je varirati broj aktivnih deonica (plavi grafik) i broj pozajmljenih pozicija (crveni grafik). Takođe je moguće delovati i na broj deonica koje manje variraju kada je portfolio konstruisan ovim pristupom nego osnovnim Markovicevim modelom (zeleni grafik). U tabeli su date vrednosti usrednjene za svih šest portfolija. Na vertikalnoj osi je broj deonica od ukupnog broja od 30 deonica koje čine Dow Jones indeks.

Figure 3. Dow Jones when short selling is not allowed. With variation of parameter τ (horizontal axis) one achieves different numbers of active shares (blue graphic) as well as the number of short positions (red graphic). Moreover, it is possible to act on the number of shares that are more stable than with basic Markowitz's model (green graphic). The table presents average values of all six portfolios. Vertical axis presents the number of shares of Dow John's index (out of a total of 30).

Grafikom na slici 3 je prikazano da se različitim vrednostima slobodnog parametra kaznene funkcije (različitim τ) postižu različite željene vrednosti koje su prikazane kao doprinosi ovog pristupa stabilizovanju Markovicevog modela. Pokazano je da variranjem slobodnog parametra kaznene funkcije agent moze postići veći ili manji broj aktivnih deonica. Takođe, variranjem fi agent može i varirati broj short pozicija u portfoliu. Vrednosti prikazane u grafiku su srednje vrednosti za šest konstruisanih portfolija.

Grafik na slici 4 predstavlja šta se dešava u slučaju kada je dodato ograničenje za kupovinu na kratko (no short-selling, $\omega_i \geq 0$).

Opet, jasno zaključujemo da se različitim vrednostima slobodnog parametra kaznene funkcije (τ) postižu različite vrednosti broja aktivnih deonica, kao i broja deonica koje manje variraju u slučaju kada je portfolio konstruisan modelom prikazanim u ovom radu. Vrednosti na grafiku predstavljaju srednje vrednosti za šest konstruisanih portfolija.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aktivne deonice	5.50	5.17	4.83	6.17	4.67	4.17	4.00	4.83	3.7	3.67
Manje variranje	7	10	3	5	18	6	3	2	14	6

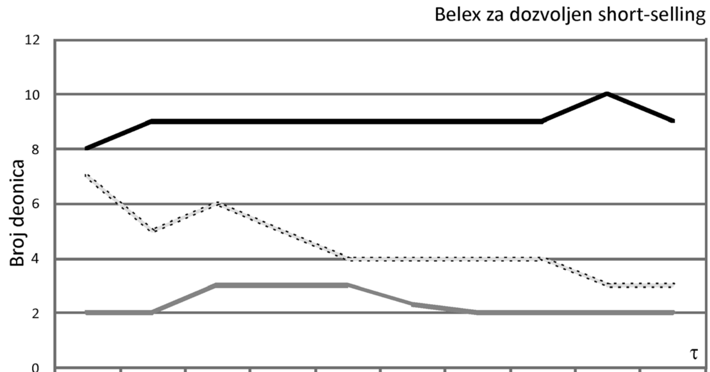
Slika 4. Dow Jones za zabranjen short-selling. Variranjem slobodnog parametra kaznene funkcije (τ) (horizontalna osa) moguće je varirati broj aktivnih deonica (plavi grafik), a samim tim i broj deonica koje manje variraju nego pri konstrukciji osnovnim Markovicevim modelom (crveni grafik) i u slučaju kada je dodato ograničenje na zabranu kupovine na kratko (no short-selling). Sve vrednosti su usrednjene za svih šest portfolija i kao takve unete u tabelu. Na vertikalnoj osi je predstavljen broj deonica od ukupnog broja od 30 deonica koje čine Dow Jones indeks. Kao i na prethodnom grafiku, možemo primetiti da investitor ima moć da upravlja portfolijem, to jest brojem aktivnih deonica, kao i brojem deonica gde je povećana stabilnost.

Figure 4. Dow Jones when short selling is not allowed. With variation of parameter τ (horizontal axis) investor achieves different numbers of shares that change (blue graphic). The table presents average values of all six portfolios. Vertical axis presents the number of shares of Dow John's index (out of a total of 30). Similar to previous graphic, it is possible for the investor to manage the portfolio, i.e. number of active and stable shares.

Po deonici prikazanoj na horizontalnoj osi, svaka vrednost na vertikalnoj osi predstavlja procenat zastupljenosti te deonice u portfoliu. Prvo što primećujemo je da su promene svakog od pondera portfolija konstruisanog modelom prikazanim u ovom radu manje nego promene portfolija konstruisanog osnovnim Markovicevim modelom, odnosno ovaj model zaista stavilizuje osnovni Markovicev model. Takođe, primećujemo veći broj neaktivnih deonica u portfoliu konstruisanim ovim modelom nego što ih možemo primetiti u konstrukciji korišćenjem osnovnog Markovicevog modela.

5.2. Primer 2: Belex

U ovom primeru će biti pokazati ista tvrđenja, međutim na drugom skupu podataka. Uzorak u ovom slučaju je 15 najlikvidnijih deonica sa Beogradske berze, koje ulaze u sastav Belex15 indeksa. Istorijski podaci



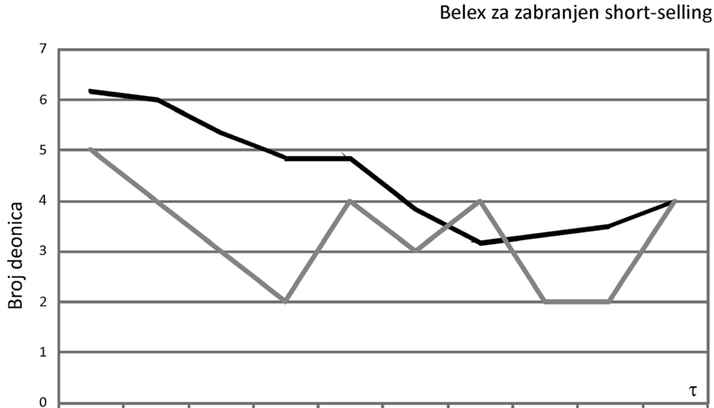
τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aktivne deonice	8	9	9	9	9	9	9	9	10	9
Short pozicije	2	2	3	3	3	2.33	2	2	2	2
Manje variranje	7	5	6	5	4	4	4	4	3	3

Slika 5. Belex za dozvoljen short-selling. Variranjem slobodnog parametra kaznene funkcije (τ) (horizontalna osa) moguće je varirati broj aktivnih deonica (plavi grafik) i broj pozajmljenih pozicija (crveni grafik). Takođe je moguće i delovati na broj deonica koje manje variraju kada je portfolio konstruisan ovim pristupom nego osnovnim Markovicevim modelom (zeleni grafik). U tabeli su usrednjene vrednosti za svih šest portfolija. Na vertikalnoj osi je broj deonica od ukupnog broja od 15 deonica koje čine Belex indeks.

Figure 5. Belex15 when short selling is not allowed. With variation of parameter τ (horizontal axis) one achieves different numbers of active shares (blue graphic), and the number of short positions (red graphic). Moreover, it is possible to act on the number of shares that are more stable than with basic Markowitz's model (green graphic). The table presents average values of all six portfolios. Vertical axis presents number of shares of Belex index (out of a total of 15).

su javni, i mogu se preuzeti na sajtu Beogradske berze (www.belex.rs). Metode kojima su dobijeni prikazani podaci su iste kao i u prethodnom slučaju. Ovaj primer je posebno izdvojen kako bi se tvrđenja pokazala i na slučaju kada portfolio sadrži manji broj deonica.

Na graficima 5 i 6 opet izvodimo iste zaključke, to jest da variranjem slobodnog parametra kaznene funkcije, moguće je varirati i broj aktivnih i short pozicija, kao i broj pozicija koje se manje menjaju u toku vremena u odnosu na slučaj kada su konstruisane Markovicevim modelom. Kao i u primeru 5.1, opet primećujemo da investitor, za razliku od korišćenja osnovnog Markovicevog modela, ima moć da kontroliše broj aktivnih pozicija, kao i samu stabilnost samog portfolija, što zaista i predstavlja jednu od najvećih pogodnosti korišćenja ovog pristupa stabilizovanju Markovicevog modela.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aktivne deonice	6.17	6.00	5.33	4.83	4.83	3.83	3.17	3.33	3.50	4.00
Manje variranje	5.00	4.00	3.00	2.00	4.00	3.00	4.00	2.00	2.00	4.00

Slika 6. Belex za zabranjen short-selling. Pokazano je da variranjem slobodnog parametra kaznene funkcije (τ) (horizontalna osa grafika) moguće varirati broj aktivnih deonica (plavi grafik), a samim tim i broj deonica koje manje variraju nego pri konstrukciji osnovnim Markovicevim modelom (zeleni grafik) i u slučaju kada je dodato ograničenje na zabranu kupovine na kratko (no short-selling). Sve vrednosti su usrednjene za svih šest portfolija i kao takve unete u tabelu. Na vertikalnoj osi je predstavljen broj deonica od ukupnog broja od 15 deonica koje čine Belex indeks. Kao i na prethodnom grafiku, možemo primetiti da investitor ima moć da upravlja portfolijem, to jest brojem aktivnih deonica, kao i brojem deonica gde je povećana stabilnost.

Figure 6. Belex when short selling is not allowed. With variation of parameter τ (horizontal axis) one achieves different numbers of active shares (blue graphic). Moreover, it is possible to act on the number of shares that are more stable than with basic Markowitz's model (green graphic). The table presents average values of all six portfolios. Vertical axis presents the number of shares of Belex index (out of a total of 15). Similar to the previous graphic, it is possible for the investor to manage portfolio, i.e. the number of active and stable shares.

6. Zaključak

U slučaju kada je kupovina na kratko (short-selling) zabranjena, model se može porediti samo sa osnovnim Markovicevim modelom i modelom u kome se umesto matrice kovarijansi koristi šrinkovana matrica, zato što se model kaznene (penaty) funkcije svodi na osnovnoi Markovicev model. Evidentno je da je ovaj model najbolja alternativa osnovnom Markovicevom modelu od svih ponuđenih, zato što jedini omogućava benefite kao što su kontrola transakcionih troškova i broja aktivnih pondera. Kako je pravi Markovicev optimalni portfolio u praksi jako retko moguće dostići (činjenica je da ponderi portfolija ne moraju da prikazuju ceo broj deonica), kompenzuje činjenicu da model iz ovoga rada nije najoptimalniji.

U slučaju kada nema ograničenja za kupovinu na kratko (short-selling), što je jako retko u praksi, u obzir dolazi i model kaznene (penalty) funkcije. Međutim, kako ovaj model, sem u strukturi, nema bitne razlike od prikazanog modela, a svodi se na običan Markovicev model u slučaju kada je kupovina na kratko (short-selling) zabranjena, jasno je da je model prikazan u ovom radu sveobuhvatniji od svih svojih mogućih alternativa.

Do istog zaključka dolazimo i iz činjenice da osnovni Markovicev model, kao i model šrinkovane matrice kovarijansi daju jedinstveno rešenje, to jest, ograničavaju slobodu investitora da bira koliko želi aktivnih, koliko noshort pozicija u portfoliu, kao i nemogućnost kontrolisanja transakcionih troškova i relativnih promena izme.u dva uzastopna portfolija.

Takođe, moguće su generalizacije modela. Tako je uz minorne promene moguće bez problema kontrolisati transakcione troškove portfolija, kao i promene vrednosti svakog od pondera portfolija.

Tvrđenja su empirijski pokazana i na dva skupa deonica, jednom velikom (deonice koje čine DowJones indeks) i jednom malom (akcije koje čine Belex indeks). Pokazano je da model, nezavisno od veličine portfolija, pokazuje bolje performanse od alternativa spomenutih u radu.

Zahvalnost. želeo bih posebno da se zahvalim mentoru Milošu Božoviću na pomoći pruženoj pri realizaciji ovog projekta.

Literatura

Brodie J., Daubechies I., De Mol C., Giannone D., Loris I. 2008. Sparse and stable Markowitz portfolios. *CEPR Discussion Paper No. DP6474*. Dostupno na: http://ssm.com/abstract=1138587

Ledoit O., Wolf M. 2003. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *Journal of portfolio management*, **30** (4): 110.

DeMiguel V., Garlappi L., Uppal R. 2009. Optimal Versus Naive Diversification: How Ineficient is the 1/N Portfolio Strategy? *The Review of Financial Studies*, **22** (5): 1915.

Fabozzi F. J., Kolm P. N., Pachamanova D. A., Focardi S. M. 2007. *Robust Portfolio Optimization and Management.* New York: Wiley

Đorđe Rakić

Alternative Approach to Stabilizing Markowitz's Model

While constructing an optimal portfolio with Markowitz’s model, one can infer a problem with the instability of the solution, i. e. one historical price can tremendously change the optimal portfolio. Furthermore, this

could lead to enormous transaction costs, which every agent wants to evade. The paper proposes an alternative approach to stabilizing Markowitz's model that, in addition to stabilizing, offers better advantages in comparison to other approaches with similar contributions. According to this approach, one should minimize the basic Markowitz's function, i.e. portfolio's variance, and the penalty function that is proportional to the reciprocal value of Euclid's norm. As shown in the paper, this approach is always well defined, which is a fundamental advantage comparing to other proposed models. The biggest advantage of this model is the possibility to control the number of active positions in the portfolio. Not only does this approach stabilize the problem, but it also reduces transaction costs, so the agents profit more.