Vukašin Stojisavljević i Mihajlo Cekić

Generalizovane Fibonačijeve kocke

Generalizovana Fibonačijeva kocka $Q_d(f)$ je uvedena kao graf dobijen iz d-dimenzionalne hiperkocke Q_d uklanjajući sve čvorove koji sadrže dati binarni string f kao podstring. Pitanje kada je $Q_d(f)$ izometričan podgraf u Q_d je potpuno rešeno kada je f string dužine šest. Razmatrana su neka pitanja koja se tiču Hamiltonovih puteva u generalizovanim Fibonačijevim kockama. Dokazano je da $Q_d(1^s)$ uvek ima Hamiltonov put i rešeni su neki specijalni slučajevi f-a. Na kraju su prikazane dve hipoteze koje se tiču izometričnosti $Q_d(f^2)$ u Q_d u zavisnosti od izometričnosti $Q_d(f)$ u Q_d i postojanja Hamiltonovog puta u $Q_d(1^s0)$.

1. Uvod

Poznato je da hiperkocke i njeni podgrafovi imaju široku primenu u kompjuterskim naukama. Fibonačijeve kocke je kao grafove prvi definisao Hsu (1993), predlažući ih pritom kao model mreže koja se koristi za paralelno procesiranje. Kasnija uopštenja dovode do pojma generalizovanih Fibonačijevih kocki. Ova relativno mlada oblast teorije grafova ostavlja mnogo mesta za istraživanje. Mi se u radu bavimo izometričnošću i hamiltonošću generalizovanih Fibonačijevih kocki.

1.1. Definicije

Prvo definišemo pojam Hamiltonovog puta grafova.

Definicija 1.1. Hamiltonov put grafa G je put koji prolazi kroz sve čvorove iz G tačno jednom. Osobinu da graf sadrži Hamiltonov put nazivamo hamiltonošću.

Sada ćemo formalno definisati pojmove hiperkocke i generalizovane Fibonačijeve kocke.

Definicija 1.2. Hiperkocka dimenzije d, u oznaci Q_d je graf čiji su čvorovi svi binarni stringovi dužine d, pri čemu su dva čvora povezana ako se razlikuju na tačno jednoj poziciji. Formalno, čvor $b = b_1 b_2 \dots b_d$ je

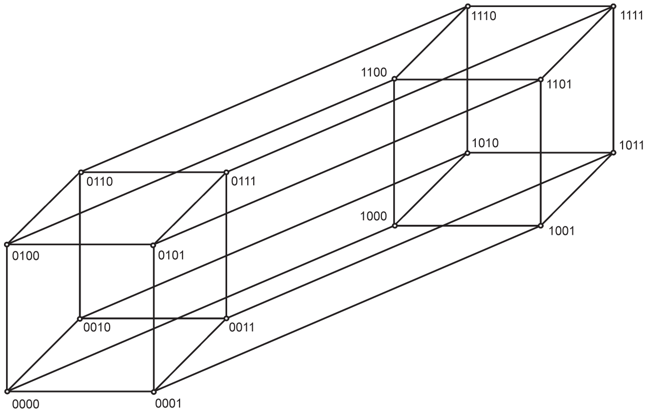
Vukašin Stojisavljević (1992), Beograd, 21. divizije 27, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Mihajlo Cekić (1991), Beograd, Zidarska 1, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Aleksandar Ilić, Matematički fakultet Univerziteta u Nišu

povezan sa čvorom $c = c_1 c_2 \dots c_d$ ako postoji tačno jedan indeks i tako da je $b_i \neq c_i$.

Primetimo zaista da za dimenzije 2 i 3, ovako definisana hiperkocka izgleda kao kvadrat odnosno kocka. Odatle inspiracija za definisanje ovog pojma.



Slika 1. Hiperkocka dimenzije 4, Q_4

Figure 1. 4-dimension hypercube, Q_4

Sada ćemo definisati izometričan podgraf grafa G. Ova definicija je od suštinskog značaja kako za ovaj rad, tako i za izučavanje generalizovanih Fibonačijevih kocki uopšte.

Definicija 1.3. Podgraf H grafa G zovemo izometričnim ako važi da je $d_G(u, v) = d_H(u, v)$ za svaka dva čvora iz H. To ćemo označavati sa:

$$H \mapsto G$$

da pokažemo da je H izometričan u G.

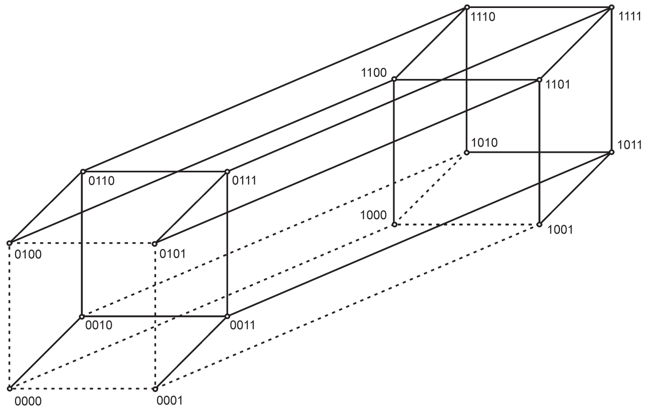
Na kraju dajemo definiciju generalizovane Fibonačijeve kocke.

Neka je binarni string b oblika $b = uvw$, dobijen spajanjem stringova u, v i w, gde u i w mogu da budu prazni. Tada kažemo da je v faktor stringa b.

Definicija 1.4. Neka je f binarni string. Tada je generalizovana Fibonačijeva kocka dimenzije d u oznaci Q_d definisana sa skupom čvorova:

$$V(Q_d(f)) = \{b | b \in V(Q_d), f \text{ nije faktor stringa } b\}.$$

Naziv generalizovane Fibonačijeve kocke dobile su po jednom specijalnom slučaju. Naime za $f = 11$ dobijamo Hsuovu definiciju Fibonačijeve kocke (Hsu 1993). Primećujemo da se Fibonačijeva kocka dimenzije d može razložiti na dve Fibonačijeve kocke dimenzija $d - 1$ i $d - 2$ pa se može pokazati da je u ovakvom grafu broj čvorova jednak F_{d+2}, gde je F_n n-ti Fibonačijev broj, pa odatle potiče i sam naziv. Primetimo još da se notacija za string f uzima zato što označava prva slova engleskih reči forbidden factor.



Slika 2.
Fibonačijeva kocka dimenzije 4, $Q_4(11)$

Figure 2.
Fibonacci 4-dimension hypercube, $Q_4(11)$

1.2. Oznake

U ovom odeljku nabrajamo osnovne oznake i nazive koje ćemo koristiti u daljem radu.

1) Za binarni string b definišimo njegov binarni komplement u oznaci $\overline{b}$.

2) Za dva binarna stringa b i c jednake dužine, definišimo njihov zbir u oznaci $b + c$ kao zbir po odgovarajućim bitovima uzet po modulu 2.

3) Označimo sa $b + e_i$ string dobijen tako sto se u stringu b promeni bit na i-toj poziciji.

4) Za binarni string $b = b_1 b_2 \ldots b_d$ dužine d, označimo sa b^R njegov obrnuti string, $b^R = b_d \ldots b_2 b_1$.

5) Niz uzastopnih istih cifara nula ili jedinica(koji ne može da se produži) u binarnom stringu b zvaćemo blokom stringa b.

1.3. Leme

Na kraju navodimo dve osnovne leme koje se tiču izometričnosti generalizovanih Fibonačijevih kocki bez dokaza. Dokaz možete naći u Ilić *et al.* (2009).

Lema 1.1. Neka je f binarni string dužine r i neka je $1 \leq d \leq r$. Tada je $Q_d(f) \mapsto Q_d$

Lema 1.2. Neka je f binarni string i $d \geq 1$. Tada je $Q_d(f)$ izomorfan sa $Q_d(\bar{f})$ i $Q_d(f^R)$.

Ove leme ćemo u radu koristiti bez pozivanja.

1.4. Rezultat rada

U radu je u potpunosti ispitana izometričnost $Q_d(f)$ u Q_d kada je f string dužine 6. Takođe je dokazano da postoji Hamiltonov put u $Q_d(1^s)$ i $Q_d(110)$.

2. Karakterizacija izometričnosti za stringove dužine šest

Izometričnost je jedan od glavnih problema koji se tiču generalizovanih Fibonačijevih kocki. U ovom odeljku je u potpunosti rešen problem izometričnosti generalizovanih Fibonačijevih kocki u hiperkocama za stringove dužine šest. Inspiracija za to dolazi iz rad Ilića i saradnika (Ilić *et al*. 2009) gde je problem rešen za stringove dužine manje od šest.

2.1. Poznati rezultati

Sledeće teoreme su preuzete iz Ilić *et al*. (2009). Teoreme se tiču izometričnosti za stringove koji se sastoje od jednog, dva ili tri bloka, kao i nekih slučajeva periodičnih stringova.

Naredna teorema je karakterizacija za stringove od jednog bloka.

Teorema 2.1. Neka je $s \geq 1$. Tada:

$Q_d(1^s) \mapsto Q_d$

Zatim navodimo karakterizaciju za stringove od tri bloka.

Teorema 2.2. Neka $r, s, t \geq 1$ i neka $d = r + s + t + 1$. Tada:

$Q_d(1^r 0^s 1^t) \not\mapsto Q_d$

Ova teorema se tiče stringova od dva bloka.

Teorema 2.3. Neka je $d \geq 2$. Tada:

(i) Za $r \geq 1$, $Q_d(1^r 0) \mapsto Q_d$.

(ii) Za $s \geq 2$, $Q_d(1^2 0^s) \mapsto Q_d \iff d \leq s+4$.

(iii) Za $r; s \geq 3$, $Q_d(1^r 0^s) \mapsto Q_d \iff d \leq 2r+3s-3$.

Navodimo još dve teoreme o periodičnim stringovima.

Teorema 2.4. Neka $s \geq 1$. Tada:

$Q_d(10)^s) \mapsto Q_d$

Teorema 2.5. Neka $s \geq 1$. Tada:

$Q_d(1^s 0 1^s 0) \mapsto Q_d$

2.2. Naši rezultati

Sada dajemo kompletnu karakterizaciju stringova dužine 6. Za svaki string f u zagradi navodimo teoremu koja opisuje izometričnost $Q_d(f)$. Tvrđenja 3.1, 3.2 i 3.3 su data nakon karakterizacije.

Nakon izbacivanja nekih potencijalnih stringova korišćenjem leme 1.2 ostaje da se okarakteriše izometričnosti za sledeće stringove:

000000 (Teorema 2.1)

000001 (Teorema 2.3)

000010 (Teorema 2.2)

000011 (Teorema 2.3)

000100 (Teorema 2.2)
000101 (Tvrđenje 2.1)
000110 (Teorema 2.2)
000111 (Teorema 2.3)
001001 (Teorema 2.5)
001010 (Tvrđenje 2.1)
001011 (Tvrđenje 2.2)
001100 (Teorema 2.2)
001101 (Tvrđenje 2.3)
001110 (Teorema 2.2)
010001 (Tvrđenje 2.2)
010010 (Tvrđenje 2.2)
010101 (Teorema 2.4)
010110 (Tvrđenje 2.2)
011001 (Tvrđenje 2.3)
011110 (Teorema 2.2)

U ovoj verziji teksta rada navešćemo formulacije i dokaze tvrđenja 2.1, 2.2 i 2.3. Za dokazivanje nekih specijalnih slučajeva ovih tvrđenja (za fiksiranu dimneziju d) koristili smo kompjutersku proveru. U algoritmu smo generisali sve stringove f, zatim za svaki string konstruisali odgovarajući graf $Q_d(f)$, pokretali BFS algoritam iz svakog čvora i proveravali da li važi da je rastojanje između svaka dva čvora jednako broju bitova u kojima se odgovarajući stringovi razlikuju.

Tvrđenje 2.1. Neka je f $\{000101, 001010\}$. Tada $Q_d(f) \mapsto Q_d$ za $d \leq 8$, a $Q_d(f) \not\mapsto Q_d$ za $d \geq 9$

Dokaz:

1. Slučaj (f = 000101)

Pretpostavimo $d = 9$. Uočimo čvorove a = 000001101 i b = 000100101.

Sada $a, b \in Q_9(000101)$ i $d(a, b) = 2$. Međutim jedini čvorovi na najkraćim putevima od a do b u Q_9 su 000101101 i 000000101, a oni nisu u $Q_9(000101)$. Dodajući odgovarajući broj 0 sa leve strane dobijamo rezultat za $d > 9$.

Slučajevi $d \leq 8$ su provereni kompjuterski.

2. Slučaj (f = 001010)

Pretpostavimo $d = 9$. Uočimo čvorove a = 001000010 i b = 001011010.

Sada $a, b \in Q_9(001010)$ i $d(a, b) = 2$. Međutim jedini čvorovi na najkraćim putevima od a do b u Q_9 su 001010010 i 001001010, a oni nisu u $Q_9(001010)$. Dodajući odgovarajući broj 0 sa leve strane dobijamo rezultat za $d > 9$.

Slučajevi $d \leq 8$ su provereni kompjuterski.

Tvrđenje 2.2. Neka je $f \in \{001011, 010001, 010010, 010110\}$. Tada $Q_d(f) \mapsto Q_d$ za $d = 7$, a $Q_d(f) \not\mapsto Q_d$ za $d = 8$.

Dokaz:

1. Slučaj (f = 001011)

Pretpostavimo d = 8. Uočimo čvorove $a = 00001111$ i $b = 00101011$. Sada $a, b \in Q_8(000101)$ i $d(a, b) = 2$. Međutim jedini čvorovi na najkraćim putevima od a do b u Q_8 su 00101111 i 00001011, a oni nisu u $Q_8(001011)$. Dodajući odgovarajući broj 0 sa leve strane dobijamo rezultat za $d > 8$.

Slučajevi $d \leq 7$ su provereni kompjuterski.

2. Slučaj (f = 010001)

Pretpostavimo $d = 8$. Uočimo čvorove $a = 01000001$ i $b = 01010101$. Sada $a, b \in Q_8(010001)$ i $d(a, b) = 2$. Međutim jedini čvorovi na najkraćim putevima od a do b u Q_8 su 01010001 i 01000101, a oni nisu u $Q_8(001011)$. Dodajući odgovarajući broj 0 sa leve strane dobijamo rezultat za $d > 8$.

Slučajevi $d \leq 7$ su provereni kompjuterski.

3. Slučaj (f = 010010)

Pretpostavimo $d = 8$. Uočimo čvorove $a = 01000010$ i $b = 01011010$. Sada $a, b \in Q_8(010010)$ i $d(a, b) = 2$. Međutim jedini čvorovi na najkraćim putevima od a do b u Q_8 su 01010010 i 01001010, a oni nisu u $Q_8(010010)$. Dodajući odgovarajući broj 0 sa leve strane dobijamo rezultat za $d > 8$.

Slučajevi $d \leq 7$ su provereni kompjuterski.

4. Slučaj (f = 010110)

Pretpostavimo $d = 8$. Uočimo čvorove $a = 01010010$ i $b = 01011110$. Sada $a, b \in Q_8(010110)$ i $d(a, b) = 2$. Međutim jedini čvorovi na najkraćim putevima od a do b u Q_8 su 01011010 i 01010110, a oni nisu u $Q_8(010110)$. Dodajući odgovarajući broj 0 sa leve strane dobijamo rezultat za $d > 8$.

Slučajevi $d \leq 7$ su provereni kompjuterski.

Tvrđenje 2.3. Neka je $f \in \{001101, 011001\}$. Tada $Q_d(f) \mapsto Q_d$.

Dokaz: Dokaz sprovodimo indukcijom po rastojanju dva čvora iz $Q_d(f)$. Pritom razmatramo nekoliko slučajeva. Za bazu indukcije dovoljno je da pokažemo da ako su dva čvora iz $Q_d(f)$ povezana (na rastojanju jedan), da su onda povezana i u odgovarajućoj hiperkocki, što je čigledno. Sada označimo dva proizvoljna čvora iz $Q_d(f)$ sa b i c, a sa i označimo prvi indeks, ledano sa leve strane, u kome se oni razlikuju. Neka su ova dva čvora na rastojanju r. Bez umanjenja opštosti uzmimo da je taj odgovarajući bit stringa b jednak *1*, a stringa c jednak 0. Ovaj deo dokaza je isti za oba stringa iz tvrđenja, tako da sada razmatramo dva slučaja, po jedan za svaki string:

1. Slučaj (f = 001101)

Sada posmatramo nekoliko mogućih slučajeva. Neka je string c' nastao menjanjem bita na i-toj poziciji u stringu c. Tada je očigledno rastojanje između b i c' jednako $r - 1$, pa možemo da primenimo induktovnu pretpostavku, samo je potrebno da c' pripada $Q_d(f)$. Ako ne pripada, bit na i-toj poziciji u c', u zabranjenom stringu može biti na tri različite pozicije $p \in \{3, 4, 6\}$:

1.1. Dobijamo string f u stringu c', tako što je i-ti bit u c' poslednji u stringu f, odnosno p = 6. Međutim, tada dobijamo da se string f pojavljuje u b, a to je nemoguće.

1.2. Bit na i-toj poziciji u c' učestvuje u stvaranju stringa f kao četvrti po redu, odnosno p = 4. Tada važi: b = ..0011.., c = ..001001.., jer je sve pre i-te pozicije isto u oba stringa. Ako sad u stringu b promenimo jedinicu na $(i - 1)$-oj poziciji u nulu, dobićemo čvor b' = ..0010.., koji svakako mora pripadati $Q_d(f)$, pa smo ovime dobili dva čvora na rastojanju manjem od r, čime smo završili.

1.3. Bit na i-toj poziciji učestvuje u stvaranju stringa f u c' kao treći po redu, odnosno p = 3. Tada važi: b = ..001.., c = ..000101... Na tri bita posle 001 u stringu b se mora nalaziti bar jedan različiti bit na odgovarajućoj poziciji u odnosu na string c, jer bi inače b sadržalo f. Sada razlikujemo tri podslučaja:

1.3.1. Različit je prvi bit posle 001, tj. b = ..0010... Sada možemo da promenimo taj bit i dobijemo čvor d = ..0011... Ako je d u $Q_d(f)$ primenjujemo induktivnu pretpostavku. Jedina mogućnost da on ne pripada $Q_d(f)$, je da je on oblika: d = ..001101, tj. b = ..001001... Sada menjamo bit na i-toj poziciji u b i dobijamo b' koji sigurno pripada $Q_d(f)$. Time dobijamo dva čvora na rastojanju manjem od r, pa i u ovom slučaju možemo da primenimo induktivnu pretpostavku.

1.3.2. Različit je drugi bit posle 001, tj. b = ..00111... Sada uočimo čvor d, susedan sa c, d = ..000111... On pripada $Q_d(f)$, a na rastojanju je manjem od r od b, pa možemo da primenimo induktivnu pretpostavku.

1.3.3. Različit je treći bit posle 001, tj. b = ..001100... Sada uočimo čvor d, susedan sa b, d = ..000100... On pripada $Q_d(f)$, a na rastojanju je manjem od r od c, pa možemo da primenimo induktivnu pretpostavku.

Ovime smo završili dokaz za prvi string.

2. Slučaj (f = 011001)

Slično kao za prvi string, posmatraćemo šta se dešava ako promenimo bit na i-toj poziciji stringa c. Ako dobijeni string pripada $Q_d(f)$, primenjujemo induktivnu pretpostavku. Ako ne pripada, bit na i-toj poziciji u c', u zabranjenom stringu može biti na tri različite pozicije $p \in \{2, 3, 6\}$.

2.1. Ako je i-ti bit u c (bit koji menjamo) poslednji u zabranjenom stringu f, odnosno p = 6, dobijamo da je b = ..011001.., a to je nemoguće jer b pripada $Q_d(f)$.

2.2. Bit na i-toj poziciji stringa c', učestvuje u stvaranju zabranjenog stringa f kao treći po redu, odnosno $p = 3$. Tada imamo: $c = ..010001..$, $b = ..011...$ Uočimo sada string $d = ..010..$ koji je susedan stringu b. Ako d pripada $Q_d(f)$, iz indukcije sledi kraj. Ako ne pripada, tada imamo da je: $b = ..01111001...$ Uočimo sada string d', susedan stringu b, $d' = ..01101001...$ Lakom proverom dobijamo da ovaj string mora da pripada $Q_d(f)$, te je ovaj slučaj završen.

2.3. Bit na i-toj poziciji stringa c', učestvuje u stvaranju zabranjenog stringa f kao drugi po redu, odnosno $p = 2$. Tada imamo: $c = ..001001..$, $b = ..01...$ četiri bita posle 01 u b, moraju da se razlikuju na bar jednoj poziciji u odnosu na string c, inače bi b sadržalo f kao podstring. Sada razlikujemo nekoliko podslučajeva:

2.3.1. Razlikuje se prvi bit posle 01 u b. Tada je $b = ..010...$ Ako promenimo odgovarajući bit u stringu c dobijamo string $d = ..000001..$ koji mu je sused. d je čvor iz $Q_d(f)$, pa smo dobili čvorove na rastojanju manjem od r i možemo da primenimo induktivnu pretpostavku.

2.3.2. Razlikuje se drugi bit posle 01 u b. Tada je $b = ..0111...$ Promenimo odgovarajući bit u stringu c, tj. uočimo čvor $d = ..001101..$, koji je sused čvoru c. On sada pripada $Q_d(f)$, pa možemo da primenimo induktivnu hipotezu jer smo dobili čvorove na rastojanju manjem od r.

2.3.3. Razlikuje se treći bit posle 01 u b. Tada je $b = ..01101...$ Uočimo sada čvor susedan čvoru b, tj. čvor $d = ..00101...$ Jedina mogućnost da on ne pripada $Q_d(f)$, je da su tri bita koja prethode 001 upravo 011. Međutim, tada su i tri bita pre 001 u c isto 011, tj. $c = ..011001001..$ pa c sadrži f, što je kontradikcija. Dakle d pripada $Q_d(f)$, pa smo dobili dva čvora na rastojanju manjem od r i možemo da primenimo induktivnu pretpostavku.

2.3.4. Razlikuje se četvrti bit posle 01 u b. Tada je $b = ..011000...$ Promenimo odgovarajući bit u stringu b, tj. uočimo čvor $d = ..001000..$, koji je susedan čvoru b. On sada pripada $Q_d(f)$, pa možemo da primenimo induktivnu hipotezu jer smo dobili čvorove na rastojanju manjem od r.

Ovime je tvrđenje dokazano korišćenjem potpune idukcije po rastojanju između čvorova.

3. Hamiltonost

Hamiltonost je pored izometričnosti jedan od bitnijih problema vezanih kako za generalizovane Fibonačijeve kocke tako i za grafove uopšte. Poznato je da Fibonačijeve kocke $Q_d(11)$ sadrže Hamiltonov put. Sada ćemo razmotriti postojanje Hamiltonov puta u $Q_d(f)$ za neke f-ove.

Sledeće tvrđenje je prirodna generalizacija hamiltonosti u $Q_d(11)$.

Tvrđenje 3.1. Postoji Hamiltonov put u $Q_d(1^s)$ za svako $s \geq 1$.

Dokaz: Za dokazivanje tvrđenja koristimo sledeću lemu:

Lema 3.1. Postoji Hamiltonov put sa krajevima 1^d i 01^{d-1} u Q_d.

Dokaz: Dokazujemo tvrđenje matematičkom indukcijom po d.

Baza indukcije: Za $d = 1$ tvrđenje je trivijalno.

Induktivna pretpostavka: Postoji Hamiltonov put sa krajevima 1^{d-1} i 01^{d-2} u Q_d.

Induktivni korak: Postoji Hamiltonov put sa krajevima 1^d i 01^{d-1} u Q_d.

Neka je G indukovan podgraf Q_d koji sadrži sve čvorove čiji je prvi bit 1, H indukovan podgraf Q_d koji sadrži sve čvorove čiji je prvi bit 0. Sada su G i H hiperkocke dimenzije d–1, pa prema induktivnoj pretpostavci postoji Hamiltonov put sa krajevima 1^d i 101^{d-2} u G i Hamiltonov put sa krajevima 01^{d-1} i 001^{d-2} u H. Kako su u Qd čvorovi 101^{d-2} i 001^{d-2} povezani, to postoji i Hamiltonov put u Q_d čiji su krajevi 1^d i 01^{d-1}, čime je lema dokazana.

Vratimo se sada na dokaz samog tvrđenja.

Fiksiramo s i dokazujemo tvrđenje potpunom indukcijom po d:

Označimo krajeve pretpostavljenog Hamiltonovog puta u $Q_d(1^s)$ sa A_d i B_d i neka je $A_1 = 1$ i $B_1 = 0$. Dokazaćemo da postoji Hamiltonov put u $Q_d(1^s)$, takav da je za $d \geq 2$ $B_d = 0A^{d-1}$.

Baza indukcije: Za svako $d \leq$ s postoji Hamiltonov put u $Q_d(1^s)$ sa krajevima A_d i B_d i za $d \geq 2$ važi $B_d = 0A^{d-1}$.

Prema Lemi 3.1 možemo uzeti $A_i = 1^i$ i $B_i = 01^{i-1}$ za $2 \leq i \leq s$–1. Neka je $B_s = 01^{s-1}$ i dokažimo da je ovaj čvor kraj Hamiltonovog puta u $Q_s(1^s)$. Prema Lemi 3.1 možemo uočiti Hamiltonov put sa krajevima Bs = 01^{s-1} i 1^s u Q_s. Neka je sused čvora 1^s na ovom putu A^s. Kako je čvor 1^s jedan od krajeva ovog puta, to u $Q_s(1^s)$ nalazimo Hamiltonov put sa krajevima A_s i B_s izbacivanjem čvora 1^s iz Hamiltonovog puta u Q_s čime je baza indukcije dokazana.

Induktivna pretpostavka: Postoji Hamiltonov put u $Q_d(1^s)$, takav da je za $d = 2$ $B_d = 0A^{d-1}$.

Induktivni korak: Dokazujemo tvrđenje iz induktivne pretpostavke za $d + 1$.

Prvi čvor na putu je $B_{d+1} = 0A_d$, zatim fiksirajući prvi bit obilazimo Hamiltonov put na preostalih d bitova koristeći induktivnu hipotezu $B_{d+1} = 0A_d \rightarrow \ldots \rightarrow 0B_d$. Ovime smo obišli sve švorove čiji je prvi bit 0. Sada je prema induktivnoj pretpostavci $0B_d = 00A_{d-1}$, pa je sledeći čvor na putu dobijen sa $0B_d = 00A_{d-1} \rightarrow 10A_{d-1}$. Obilazimo Hamiltonov put na preostalih d–1 bitova fiksirajući prva 2 bita korišćenjem induktivne pretpostavke $10A_{d-1} \to \ldots \to 10B_{d-1}$. Ovime smo obišli sve čvorove koji počinju sa 10. Ponavljajući isti postupak možemo obići sve čvorove koji počinju sa $1^k 0$ gde je $1 \le k \le s-1$. Ovime smo obišli sve čvorove i samim tim dokazali postojanje Hamiltonovog puta.

Hamiltonov put:

$B_{d+1} = 0A_d \to \ldots \to 0B_d = 00A_{d-1} \to 10A_{d-1} \to \ldots \to 10B_{d-1} =$
$= 100A_{d-2} \to 110A_{d-2} \to \ldots \to 110B_{d-2} \to \ldots \to 1^{s-1}0A_{d-s+1} \to \ldots \to$
$\to 1^{s-1}0B_{d-s+1} = A_{d+1}$

Tvrđenje 3.2. Postoji Hamiltonov put u $Q_d(110)$.

Dokaz: Dokazujemo tvrđenje potpunom indukcijom po d:

Baza indukcije: Za $d = 3$ postoji Hamiltonov put u $Q_d(110)$ čiji je jedan kraj 1^d.

Za $d = 2$ baza je očigledna. Za $d = 3$ uzmimo put:

$111 \to 101 \to 100 \to 000 \to 001 \to 011 \to 010$.

On je Hamiltonov u $Q_3(110)$.

Induktivna pretpostavka: Za fiksirano d i svako $k \le d-1$ postoji Hamiltonov put u $Q_k(110)$ čiji je jedan kraj 1^k.

Induktivni korak: U $Q_d(110)$ postoji Hamiltonov put čiji je jedan kraj 1^d.

Označimo kraj Hamiltonovog puta u Q_k za $k \le d-1$ sa B_k. Konstruišemo Hamiltonov put na sledeći način:

Prvi čvor u putu je 1^d, drugi čvor je 101^{d-2}, zatim fiksirajući prva 2 bita obilazimo Hamiltonov put na preostalih d–2 bitova koristeći induktivnu pretpostavku 101^{d-2} ? ... ? $10B^{d-2}$. Ovime smo obišli sve čvorove čiji je prvi bit 1. Sada je sledeći čvor u putu $00B^{d-2}$, pa zatim ponovo fiksiramo prva 2 bita i koristeći induktivnu pretpostavku obilazimo $00B^{d-2}$ $\to \ldots \to 001^{d-2}$. Ovime smo obišli sve čvorove čija su prva 2 bita nule. Sledeći čvor na putu je 01^{d-1}, pa 0101^{d-3} i sada opet koristeći induktivnu pretpostavku i fiksiraju ći prva 3 bita obilazimo $0101^{d-3} \to \ldots \to 010B^{d-3}$. Ovime smo obišli sve čvorove koji počinju stringom 01, pa smo stoga izdvojili Hamiltonov put u Q_d.

Hamiltonov put:

$1^d \to 101^{d-2} \to \ldots \to 10B_{d-2} \to 00B_{d-2} \to \ldots \to 001^{d-2} \to 01^{d-1}$
$01^{d-1} \to 0101^{d-3} \to \ldots \to 010B_{d-3}$

4. Hipoteze

U ovom odeljku navodimo dve hipoteze. Prva hipoteza se tiče izometričnosti i prvi put je formulisana u Ilić *et al* (2009).

Hipoteza 4.1. $Q_d(f) \hookrightarrow Q_d \Rightarrow Q_d(f^2)$

Hipoteza je potvrđena za stringove dužine dva, tri i četiri.

Druga hipoteza govori o hamiltonosti generalizovanih Fibonačijevih kocki $Q_d(1^s0)$.

Hipoteza 4.2. Postoji Hamiltonov put u $Q_d(1^s0)$, $s \geq 1$.

Inspiracija za postavljanje ove hipoteze potiče od rezultata da u $Q_d(110)$ postoji Hamiltonov put.

5. Zaključak

U radu su razmatrani pitanje izometričnosti i pitanje hamiltonosti generalizovanih Fibonačijevih kocki. Prikazani su raniji rezultati iz ove oblasti, kao i neki novi rezultati. Na kraju želimo da se zahvalimo našem mentoru, Aleksandru Iliću, bez čije pomoći realizacija ovog rada ne bi bila moguća.

Literatura

Aytac V., Turaci T. 2010. Some graph parameters and extended Fibonacci cubes, *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, 17: 5.

Brešar B., Klavžar S. 2006. Θ-graceful labelings of partial cubes. *Discrete Math.*, **306** (13): 1264.

Dedó E., Torri D., Zagaglia Salvi N. 2002. The observability of the Fibonacci and the Lucas cubes. *Discrete Math.*, **255** (1-3): 55.

Ellis-Monaghan J. A., Pike D. A., Zou Y. 2006. Decycling of Fibonacci cubes. Australas. *J. Combin.*, **35**: 31.

Gregor P. 2006. Recursive fault-tolerance of Fibonacci cube in hypercubes. *Discrete Math.*, *306* (13): 1327.

Hsu W.-J. 1993. Fibonacci cubes – a new interconnection technology. I*EEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, **4** (1): 3.

Ilić A., Klavžar S., Rho Y. 2009. *Generalized Fibonacci cubes.* Manuskript

Klavžar S. 2005. On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes. *Discrete Math.*, **299** (1-3): 145.

Klavžar S., Peterin I. 2007. Edge-counting vectors, Fibonacci cubes, and Fibonacci triangle. *Publ. Math. Debrecen*, **71** (3-4): 267.

Klavžar S., Žigert P. 2005. Fibonacci cubes are the resonance graphs of Fibonaccenes. *Fibonacci Quart.*, **43** (3): 269.

Munarini E., Salvi Zagaglia N. 2002. Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes. *Discrete Math.*, **255** (1-3): 317.

Offner D. 2009. Some Turán type results on the hypercube. *Discrete Math.*, **309** (9): 2905.

Vukašin Stojisavljević and Mihajlo Cekić

Generalized Fibonacci Cubes

A generalized Fibonacci cube $Q_d(f)$ is introduced as a graph obtained from the d-dimensional hypercube Q_d by removing all vertices that contain a given binary string f as a substring. In this paper we present some properties of generalized Fibonacci cubes. The question whether $Q_d(f)$ is an isometric subgraph of Q_d is completely solved for f being a length six string. Some questions concerning Hamiltonian paths in generalized Fibonacci cubes are considered. It is proven that $Q_d(1^s)$ always has a Hamiltonian path and some special cases for f are also solved. Finally, two conjectures are presented.