Ana Stanojević i Petra Antić

Određivanje broja konfiguracija Rubikove kocke i magične sfere putem teorije grupa

Primenom teorije grupa definisana je grupa operacija nad Rubikovom kockom i opisane neke njene osobine. Takođe je izračunat teorijski broj konfiguracija. Utvrđen je poseban način zapisivanja kofiguracije kocke, koristeći se permutacijama. Na kraju, dokazana je teorema o potrebnim uslovima da bi neka konfiguracija bila važeća i pokazano je da se tek deo ukupnog broja teoretski mogućih konfiguracija kocke može dobiti rotiranjem strana kocke. Sličan postupak primenjen je i na izračunavanje broja konfiguracija kod magične sfere.

Uvod

Rubikovu kocku izmislio je Erno Rubik 1974. godine, ali je 1980. godine kocka doživela najveći uspeh. Došlo je do otkrivanja raznih algoritama za njeno rešavanje, a mnogi i dalje pokušavaju da pronađu tzv. „algoritam snova“, koji bi za svaku poziciju davao rešenje u najmanjem broju poteza. Organizovana su i mnoga takmičenja u brzom rešavanju kocke. Kao igračka koja zahteva određeno logičko razmišljanje, kocka je pre svega doprinela većem interesovanju za matematiku i mogućnosti da se na zanimljiv način upoznamo sa matematičkim teorijama (tačnije teorijom grupa). Kasnije su izmišljene još mnoge sliče logičke igračke, poput *magičnog valjka*, tetraedra, kocke 4×4×4, 5×5×5, i nama posebno zanimljiva *magična sfera*.

U ovom radu je primenom teorije grupa definisana grupa operacija nad Rubikovom kockom, opisane neke njene osobine i izračunat teorijski broj konfiguracija uopštene Rubikove kocke. Sličnim postupkom izračunat je i broj konfiguracija magične sfere.

Osnovni pojmovi teorije grupa

Definišimo najpre pojam grupe.

Definicija 1. Grupa je uređeni par $(G, \circ)$ gde je G neprazan skup a $\circ$ binarna operacija nad G takva da važi:

– Operacija $\circ$ je asocijativna. To jest za svako $a, b, c \in G$, $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
– U grupi $(G, \circ)$ postoji neutralni element $e \in G$ u odnosu na operaciju $\circ$, tj. element za koji važi $g = e \circ g = g \circ e$, za svako $g \in G$.
– Za svaki element $g \in G$ postoji njegov inverz $h \in G$, tako da je $g \circ h = h \circ g = e$.

Lema 1. Ako je $(G, \circ)$ grupa onda ona ima tačno jedan neutralni element i svako $g \in G$ ima tačno jedan inverzni element.

Da bismo lakše proučili grupu možemo posmatrati njene delove takozvane podgrupe.

Definicija 2. Neka je $(G, \circ)$ grupa, a H neprazni podskup skupa G. Ako je H zatvoren za operaciju $\circ$, odnosno ako je uređeni par $(H, \circ)$ grupa, tada tu grupu nazivamo podgrupom $(G, \circ)$.

Definicija 3. Neka je $(G, \circ$ grupa i $S \sqsubseteq G$. Kažemo da S generiše G ako svaki element iz G može da se predstavi kao proizvod elemenata iz S. To označavamo kao $G = \langle S \rangle$.

Teorema 1. Neka je G grupa sa konačnim brojem elemenata i S podgrupa od G. Pretpostavimo da su zadovoljena sledeća dva uslova:

1. Svaki element S zadovoljava neku osobinu P.
2. Ako $g \in G$ i $h \in G$ zadovoljavaju osobinu P, onda i $g \circ h$ takođe zadovoljava osobinu P.

Tada svaki elemenat iz $\langle S \rangle$ zadovoljava P.

Definicija 4. Simetrična grupa reda n je uređeni par (S_n, E), gde je S_n skup svih svih permutacija

Ana Stanojević (1993), Niš, Ilije Birčanina 36, učenica 1. razreda Gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu

Petra Antić (1992), Niš, Generala Bože Jankovića 27/29, učenica 2. razreda Gimnazije „Bora Stanković“ u Nišu

nekog skupa sa n elemenata, a E operacija kompozicije nad tim permutacijama.

Definicija 5. Ciklus $\varphi = (i_1, i_2... i_k)$ je element Sn definisan kao $\varphi(i_1) = i_2$, $\varphi(i_2) = i_3$... $\varphi(i_{k-1}) = i_k$, $\varphi(i_k) = i_1$ i $\varphi(j) = j$ ako je $j \neq i_r$ za svako r. Dužina ovog ciklusa je k (k-ciklus). Brojeve $i_1, i_2...i_k$ nazivamo elementima ciklusa, dok skup brojeva i_1, i_2... i_k koji gradi ciklus označavamo kao supp φ.

Definicija 6. Ciklus sastavljen od dva elemenata nazivamo transpozicijom.

Definicija 7. Dva ciklusa σ i τ su disjunktna ako nemaju zajedničke elemente. Ovo označavamo sa supp $\sigma \cap$ supp $\tau = \emptyset$.

Svako $\rho \in S_n$ može biti napisano kao proizvod (kompozicija) disjunktnih ciklusa sa dva ili više elemenata.

Grupa permutacija

Definicija 8. Grupa permutacija je grupa čiji su elementi permutacije elemenata datog skupa A i nad kojom je definisana operacija kompozicije permutacija.

Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2\ldots, a_k\}$ i neka se taj skup slika u samog sebe. Funkcija preslikavanja elemenata od a_1 do a_k, koja je bijekcija čini permutaciju. Primetimo da je grupa svih permutacija skupa A simetrična grupa.

Teorema 2. Svaki ciklus dužine k se može napisati u obliku proizvoda $k-1$ transpozicija: $(a_1, a_2..., a_{k-1}, a_k) = (a_1, a_2) \circ (a_1, a_3) \circ ... \circ (a_1, a_{k-1}) \circ (a_1, a_k)$.

Definicija 9. Parne permutacije su one dobijene kompozicijom parnog broja transpozicija; neparne permutacije su one dobijene kompozicijom neparnog broja transpozicija.

Znak permutacije označavamo sa $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$, tako da svaka parna ima znak +1, a neparna –1. Svaka transpozicija je neparna permutacija. Za svaku permutaciju važi da je broj transpozicija ili paran ili neparan. Permutacija ne može biti i parna i neparna u isto vreme.

Teorema 3. Ciklusi sa parnim brojem elemenata su neparne, a ciklusi sa neparnim brojem elemenata su parne permutacije.

Dokaz: Znamo da je $(a_1, a_2,... a_{k-1}, a_k) = (a_1, a_2) \circ (a_1, a_3) \circ ... \circ (a_1, a_{k-1}) \circ (a_1, a_k)$.

Znak ciklusa $(a_1, a_2,... a_{k-1}, a_k)$ je jednak proizvodu znakova 2-ciklusa koji ga čine. Kako svaka transpozicija ima znak –1, a njih je ukupno k–1, znači da je znak ciklusa jednak $(-1)^{k-1}$. Sledi da, ako je k (broj elemenata ciklusa) parno, ciklus ima znak –1, tj. neparan je. Ako je k neparno znak je +1 i ciklus je paran. QED.

Svojstva Rubikove kocke

Notacija Rubikove kocke

Rubikovu kocku čine tri vrste kockica: osam ugaonih (sa tri vidljive strane različitih boja), dvanaest ivičnih (sa dve vidljive strane različitih boja) i šest centralnh (sa jednom vidljivom stranom). Fiksirajmo datu kocku u određeni položaj i označimo sa r (right), l (left), u (up), d(down), f (front) i b(back) desnu, levu, gornju, donju, prednju i zadnju stranu Rubikove kocke u odnosu na lice posmatrača. Ugaonu kockicu obeležavamo na osnovu mesta gde se nalazi, koristeći notaciju triju strana kocke kojima pripada. Svaka od njih na svom mestu može biti orijentisana na tri načina. Označimo strane kockice sa 1, 2 i 3. Moguće orijentacije onda su 123, 231 i 312. Na kraju definišimo i osnovne pokrete Rubikove kocke. Rotaciju neke strane za 90° u smeru kazaljke na satu označavaćemo slovima R, L, U, D, F i B za desnu, levu, gornju, donju, prednju i zadnju stranu.

Grupa Rubikove kocke

Definicija 10. Pokret M na Rubikovoj kocki predstavlja jednu od kompozicija elementarnih pokreta {F, D, B, U, R, L}.

Pokret koji sadrži četri uzastopna ista slova jednak je pokretu koji u sebi ima ista slova kao niz dobijen od pomenutog izbacivanje ta četiri slova. Uvedimo strukturu $(G, *)$, gde je **G** skup svih nizova slova {F, R, D...} = M uključujući i prazan niz (koji označavamo sa Ω), a operacija * nadovezuje dva niza (poteza) jedan na drugi. Za nju važi da je FFFF = RRRR = DDDD = … = Ω. Ako su M_1 i M_2 dva pokreta, onda nadovezivanje ova dva pokreta označavamo kao $M_1 * M_2$.

Dokažimo da je ovakva struktura grupa, treba pokazati četiri osnovna uslova grupe:

- Skup G je zatvoren za operaciju * jer, ako su M_1 i M_2 pokreti, $M_1 * M_2$ je takođe pokret.
- Nadovezivanje je asocijativna operacije jer krajnji rezultat zavisi samo od redosleda

primenjivanja pokreta, nevezano za to koja su dva udružena.

- Ako bi Ω bio „prazan“ pokret (tj. onaj koji ne menja konfiguraciju Rubikove kocke), onda bi važilo $\Omega * M = M * \Omega$, pa grupa ima neutralni element.
- Ako je $M = X_1\ X_2 \ldots Xn$ pokret, onda možemo napraviti njemu inverzan pokret M' $= XnXnXn \ldots X2X2X2X1X1X1$, jer tako dobijamo niz u kome postoje grupe sa po četri uzastopna ista slova, koja, zbog asocijativnosti, možemo zameniti sa Ω, odnosno dobijamo niz praznih pokreta, pa se kocka nalazi u nepromenjenom stanju. To zapisujemo kao $M * M'$' $= M' * M = \Omega$, gde je M' inverzni element od M.

Iz ovog sledi da je skup pokreta Rubikove kocke grupa $(G, *)$. Dva niza smatraćemo istim ukoliko se izvršavanjem odgovarajućih poteza dobija ista konfiguracija.

Zapis konfiguracije Rubikove kocke

Da bismo znali kako izgleda kocka, potrebno je da znamo koja ugaoa kockica je u kom uglu, koja ivična na kojoj ivici, i njihove orijentacije. Sve to opisujemo četvorkom (σ, τ, x, y).

Označimo simetričnu grupu ugaonih kockica kocke sa S_8 koja je skup permutacija σ_i od po 8 elemenata, čiji su domen sve ugaone kockice, a kodomen sva moguća mesta na koja one mogu da stoje. Dakle prvi član četvorke predstavlja jedno preslikavanje kockica na 8 ponudjenih mesta, odnosno predstavlja jedan od mogućih položaja ivičnih kockica.

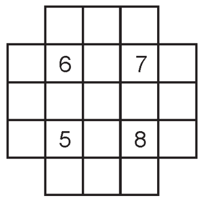
Označimo sada i simetričnu grupu položaja ivičnih kockica kocke sa S_{12} koja je skup permutacija τ_i od po 12 elemenata čiji su domen sve ivične kockice kocke, a kodomen sva moguća mesta na koja one mogu da stoje. Dakle, drugi član četvorke predstavlja jedan od mogućih položaja ivičnih kockica.

Definicija 11. σ^{-1} perdstavlja permutaciju inverznu permutaciji σ.

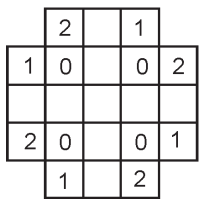
X predstavlja uredjenu osmorku iz skupa $\{0, 1, 2\}$ koji označavaju orijentaciju određene ugaone kockice. Zamislimo kocku u početnoj (složenoj) konfiguraciji. Označimo brojevimo po jednu stranu mesta kockica na sledeći način.

1 na u strani *ufl* mesta
2 na u strani *urf* mesta
3 na u strani *ubr* mesta
4 na u strani *ulb* mesta
5 na d strani *dbl* mesta
6 na d strani *dlf* mesta
7 na d strani *dfr* mesta
8 na d strani *drb* mesta

Sada svako ugaono mesto ima po jednu označenu stranu. Svaka ugaona kockica samim tim ima po jednu stranu koja odgovara numerisanoj strani mesta kockice.Označimo tu stranu kockice sa 0. U smeru sata označimo preostale dve strane kockice sa 1 i 2. Dakle, jedna od označenih strana kocke izgledaće u početnoj konfiguraciji (složenoj kocki):

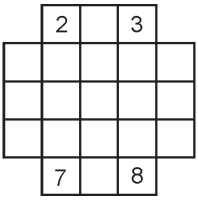


Odnosno kada upotrebimo odgovarajuću notaciju:

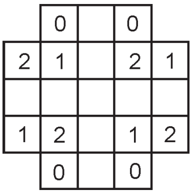


Svaka strana svake ugaone kockice je numerisana. Ukoliko opisujemo kocku u bilo kojoj konfiguraciji, opisujemo konfiguraciju kocke na sledeći način: za bilo koje i između 1 i 8 pronadjemo stranu mesta kockice obeleženu ovim brojem; neka je x_i broj kojim je obeležena strana kockice koja odgovara toj strani mesta. Te promenljive su brojevi koje označavaju broj rotacija u smeru kazaljke na satu potrebnih da bi se ugaona kockica vratila u položaj u kome se nalazi kada je kocka rešena, tj. da bi se njena strana obeležena sa 0 poklopila sa numerisanom stranom mesta. Pritom, treba primetiti da je ona koja je udaljena 3 rotacije, zapravo na traženom mestu, pa su zato x_i elementi skupa ostataka pri deljenju sa 3, tj. $x \in \{0, 1, 2\}$ (taj skup označimo sa Z_3). Dakle, ako je Rubikova kocka složena svako $x_i = 0$, ili kraće $x = 0$.

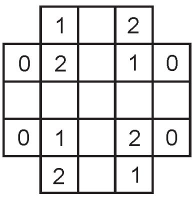
Primer 1. Uočimo šta bi bili x_i ako su obeležene gornja i donja strana, a mi primenimo pokret R. Na slici posmatramo desnu stranu:



a označavanje bi bilo sledeće:



Kada rotiramo stranu za 90° dolazimo do ovog stanja:



Tako ne utičemo na kockice na levoj strani, pa je $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_{15} = 0$ i $x_6 = 0$, a sa slike se vidi da je $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_7 = 2$ i $x_8 = 1$, tj. $x = (0, 1, 2, 0, 0, 0, 2, 1)$.

Slično se pokazuje i za rotaciju ostalih strana.

y predstavlja uređenu dvanaestorku brojeva iz skupa $\{0, 1\}$. Analogno prethodnom primeru, označimo ivične kockice. I sada su promenljive od y_1 do y_{12} brojevi koji označavaj broj rotacija (0,1) potrebnih da bi se ivična kockica vratila u položaj u kome se nalazi kada je kocka rešena, tj. da se strana kockice obeležena sa 0 poklopi sa numerisanom stranom mesta. Dakle, $y \in \{0, 1\}$ (taj skup označimo sa Z_2). Sledi da za početnu konfiguraciju važi: $(\sigma, \tau, x, y) = (1, 1, 0, 0)$.

Važeće konfiguracije Rubikove kocke

Kombinatorno moguć broj konfiguracija

Neka je $S = \{F, D, B, U, R, L\} \subset G$. Tada po definiciji pokreta svako $M \in S$ zadovoljava svojstvo da sve centralne kockice zadržava zadržava nepokretnim. Svaki od šest osnovnih pokreta zadržava sve centralne kockice nepokretne, pa i kompozicija bilo koja dva pokreta zadržava sve centralne kockice nepokretne. Kako važi $G = \langle S \rangle$, to svaki element G zadovoljava ovo svojstvo, tj. centralne kockice nikada ne menjaju svoj položaj. Ivična kockica može se naći na mestu druge ivične kockice i ugaona na mestu druge ugaone, ali je nemoguće da ivična i ugaona zamene mesta.

Koristeći ove zaključke izračunajmo koliko mogućih konfiguracija ima Rubikova kocka. Posmatrajmo jedno mesto ugaone kockice, na njemu se teoretski može nalaziti bilo koja od njih osam, time ostaje njih sedam za sledeći ugao, njih šest za treći, itd. Sledi da postoje $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8!$ Mogućih rasporeda ugaonih kockica. Ali, svaka od njih može biti smeštena na tri načina, dakle, postoji 3^8 načina kako sve one mogu biti orijentisane. Dakle ukupan broj mogućih konfiguracija ugaonih kockica je $8! \cdot 3^8$. Analogno tome, kako je ivičnih kockica dvanaest, postoji 12! mogućih rasporeda i pri tome svaka od njih može biti orijentisana na dva načina što daje ukupno 2^{12} mogućih konfiguracija. Dakle postoji $12! \cdot 2^{12}$ mogućih konfiguracija ivičnih kockica. Konačno dolazimo do broja od $8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$ teoretski mogućih konfiguracija Rubikove kocke, a to iznosi oko 5.19×10^{20}.

Pre nego što pokažemo da je samo deo ovih konfiguracija validan, odnosno, može se zaista dobiti rotacijama kocke u početnom, rešenom stanju, definišimo još nekoliko pojmova na primeru Rubikove kocke.

Definicija 12. Neka su $(G, *)$ i $(H, \bullet)$ dve grupe. Homomorfizam iz G u H je definisan kao funkcija $\phi : G \to H$ takva da važi: $\phi(a * b) = \phi(a) \bullet \phi(b)$ za svako $a, b \in G$.

Kod kocke definišemo preslikavanje $\phi_{ugao} : G \to S_8$. Dakle to je permutacija koja u kompoziciji sa trenutnom permutacijom iz G, daje određenu permutaciju samo ugaonih kockica (σ). Svaki pokret iz G menja raspored ugaonih kockica, tj. određuje novu permutaciju osam neorijentisanih ugaonih kockica. Tu permutaciju označavamo sa $\sigma \in S_8$. Tada je $\phi_{ugao}(M)$ element S_8 koji nam pokazuje kako su kockice međusobno promenile mesta, što možemo prikazati kompozicijom disjunktnih ciklusa. Na isti način definišemo i homomorfizam $\phi_{ivica} : G \rightarrow S_{12}$ koji opisuje permutacije dvanaest neorijentisanih ivičnih kockica, kao i $\phi_{kocka} : G \rightarrow S_{20}$, što opisuje permutacije 20 ivičnih i ugaonih kockica.

Definicija 13. Jezgro homomorfizma ψ: $G \rightarrow H$ je definisano kao $g \in G| \ \psi(g) = 1_H$ i označava se kao kerψ.

Kod kocke jezgro homeomorfizma $\psi_{kocka} : G \rightarrow S_{20}$ čine svi pokreti kji ne dovode do promene pozicija nijedne od kockica, već utiče samo na njihove orijentacije.

Definicija 14. Dejstvo grupe (G, *) na neprazan skup A je preslikavanje $A \times G \rightarrow A$, (gde za dato $a \in A$ i $g \in G$ dobijamo element $a * g \in A$) koje zadovoljava sledeća dva svojstva:

- $(a * g_1) * g_2 = a * (g_1 * g_2)$, za svako $a \in A$ i $g_1, g_2 \in G$
- $a * \Omega = a$, $a \in A$ (Ω je neutralni element grupe G).

Definicija 15. Ako G deluje na skup konfiguracija A, orbita elementa $a \in A$ je skup a $\circ$ g : $g \in G$.

Kod kocke jednu orbitu čine sve moguće konfiguracije koje možemo dobiti delovanjem elemenata (G, *) na neku početnu konfiguraciju. Ukoliko je početna konfiguracija rešena kocka, njena orbita je skup svih validnih konfiguracija. S druge strane, ako bismo izvukli jednu kockicu iz složene kocke i zamenili joj orijentaciju, daljim rotacijama dobili bismo ponovo novu orbitu. Zbir konfiguracija iz svih mogućih orbita je zapravo broj kombinatorno mogućih konfiguracija.

Teorema 4. Pretpostavimo da grupa (G, *) deluje na skup A i neka je skup S generišući za G. Neka je P osobina tako da važi sledeće: kad god $a \in A$ zadovoljava P i $s \in S$, onda i $a * s$ zadovoljava P. Tada ako $a_0 \in A$ zadovoljava P, onda svaki element orbite a_0 zadovoljava P.

Sada ćemo upotrebiti sve prethodne definicije, teoreme i zaključke da bismo izračunali mogući broj konfiguracija Rubikove kocke. Dokažimo teoremu koja će nam dati direktan put ka rešenju.

Teorema 5. Konfiguracija Rubikove kocke (σ, τ, x, y) je validna ako i samo ako važe sledeća tri uslova:

sgn (σ) = sgn (τ)

$\Sigma\, x_i \equiv 0 \pmod 3$

$\Sigma\, y_i \equiv 0 \pmod 2$

Kako u teoremi važi ekvivalencija to je moramo dokazati u oba smera. Prvo pretpostavimo da je konfiguracija (σ, τ, x, y) validna i dokažimo da važi sgn (σ) = sgn (τ), $\Sigma\, x_i \equiv 0 \pmod 3$, $\Sigma\, y_i \equiv 0 \pmod 2$.

Lema 2. Ako su konfiguracije (σ, τ, x, y) i (σ', τ', x', y') u istoj orbiti onda važi da je sgn (σ) * sgn (τ) = sgn (σ) * sgn (τ).

Uzmimo za konfiguraciju (σ', τ', x', y') rešenu konfiguraciju (1, 1, 0, 0). Kako je $\sigma' = 1$ to je σ' jedinična permutacija. Odavde sledi da se permutacija sastoji od 8 ciklusa sa jednim elementom, pa je broj transpozicija jednak 0, tj. permutacija je parna i sgn (σ) = 1. Slično sledi da je sgn (τ) = 1. A odavde prema prethodnoj lemi sgn (σ) * sgn (τ) = 1, tj sgn (τ) = sgn (σ).

Lema 3. Ako su konfiguracije (σ, τ, x, y) i (σ', τ', x', y') u istoj orbiti onda važi $\Sigma x_i = \Sigma x_i' \pmod 3$ i $\Sigma y_i = \Sigma y_i' \pmod 2$.

Dokaz: Iz Teoreme 4 sledi da važi da je dovoljno dokazati da ako važi (σ', τ', x', y') = (σ, τ, x, y) * M, gde je M jedan od šest osnovnih pokreta na kocki. Onda je $\Sigma x_i = \Sigma x_i' \pmod 3$ i $\Sigma y_i = \Sigma y_i' \pmod 2$. Pokažimo to na primeru gde je $M = R$. Neka je na početku desna strana kocke obeležena:

	X_2		X_3	
X_2+2	X_2+1		X_3+2	X_3+1
X_7+1	X_7+2		X_8+1	X_8+2
	X_7		X_8	

Ako zarotiramo ovu stranu za 90°, dobijamo:

	X_7+1		X_2+2	
X_7	X_7+2		X_2+1	X_2
X_8	X_8+1		X_3+2	X_3
	X_8+2		X_3+1	

Kako je $x' = (x_1, x_7 + 1, x_2 + 2, x_4, x_5, x_6, x_8 + 2, x_3 + 1)$. Tako da je $\Sigma x_i' = \Sigma x_i + 6 = \Sigma x_i \pmod 3$. Analogno dokazujemo za y. Analogno dokazujemo za $M \in \{$F, D, B, U, R, L$\}$. QED.

Za rešenu konfiguraciju (1, 1, 0, 0) važi ($\Sigma x_i \equiv 0$ i $\Sigma y_i \equiv 0$). Ako su (σ, τ, x, y) i (σ', τ', x', y') validne konfiguracije onda su one u istoj orbiti sa rešenom konfiguracijom, pa prema prethodnoj lemi važi da je ($\Sigma x_i \equiv 0$ i $\Sigma y_i \equiv 0$) i ($\Sigma x_i' \equiv 0$ i $\Sigma y_i' \equiv 0$).

Ovim smo dokazali jedan smer Teoreme 5. Dokažimo sada i drugi. Dakle, pretpostavimo da važi sgn (σ) = sgn (τ), $\Sigma x_i \equiv 0$ (mod 3), $\Sigma y_i \equiv 0$ (mod 2) i dokažimo da je konfiguracija (σ, τ, x, y) validna. Da bismo to dokazali, ideja je da nađemo niz koraka koji bi tu konfiguraciju vratili u početnu rešenu.

Dokaz ćemo izvesti pomoću četiri tvrđenja:

1. Ako je konfiguracija (σ, τ, x, y) takva da važi sgn (σ) = sgn (τ), $\Sigma x_i \equiv 0$ (mod 3), $\Sigma y_i \equiv 0$ (mod 2), onda orbita konfiguracije (σ, τ, x, y) sadrži konfiguraciju oblika $(1, \tau', x', y')$ gde je $\sigma' = 1$. Ovim tvrđenjem postavljamo sve ugaone kockice na svoja mesta.

2. Ako je konfiguracija $(1, \tau, x, y)$ takva da važi 1 = sgn (τ), $\Sigma x_i \equiv 0$ (mod 3), $\Sigma y_i \equiv 0$ (mod 2), onda orbita konfiguracije $(1, \tau, x, y)$ sadrži konfiguraciju oblika $(1, \tau', 0, y')$ gde je $\Sigma x_i \equiv 0$ (mod 3). Ovim tvrdjenjem pravilno orijentišemo sve ugaone kockice.

3. Ako je konfiguracija $(1, \tau, 0, y)$ takva da važi 1 = sgn (τ), $\Sigma y_i \equiv 0$ (mod 2), onda orbita konfiguracije $(1, \tau, 0, y)$ sadrži konfiguraciju oblika $(1, 1, 0, y')$, gde je $\tau' = 1$. Ovim tvrđenjem postavljamo sve ivične kockice na svoja mesta.

4. Ako je konfiguracija $(1, 1, 0, y)$ takva da važi 1 = sgn (τ), $\Sigma y_i \equiv 0$ (mod 2), onda orbita konfiguracije $(1, 1, 0, y)$ sadrži konfiguraciju oblika (1, 1, 0, 0) gde je $\Sigma y_i' \equiv 0$ (mod 2). Ovim tvrđenjem pravilno orijentišemo sve ivične kockice.

Lema 4. Homeomorfizam $\phi_{\text{ugao}} : G \to S_8$ je funkcija na.

Ovu lemu nećemo dokazivati, ali će nam koristiti u izvođenju dokaza za ova četiri tvrđenja.

Dokaz [Tvrđenje 1]: Iz prethodne leme sledi da postoji pokret $M \in G$ tako da važi $\phi_{\text{ugao}}(M) = \sigma^{-1}$. Odavde sledi $(\sigma, \tau, x, y) * M = (1, \tau', x', y')$ za neko $\tau' \in S_{12}$, $z' \in Z_3^8$ i $y' \in Z_2^{12}$. Iz Leme 3 sledi da će važiti $\Sigma x_i = \Sigma x_i'$ (mod 3) i $\Sigma y_i = \Sigma y_i'$ (mod 2).

Sada ćemo dokazati da važi Tvrđenje 2. Osnovna ideja za orijentisanje ugaonih kockica jeste da koristimo pokrete koji će samo zameniti orijentaciju dve ugaone kockice. Prvo ćemo pokazati da potezi zaista postoje.

Lema 5. Ako su C_1 i C_2 bilo koje dve ugaone kockice, postoji pokret $M \in G$ koji utiče na orijentacije (ali ne i pozicije) C_1 i C_2 i ne utiče na ostale ugaone kockice. Šta više, postoji takav pokret M da C_1 rotira u smeru kazaljke na satu, a C_2 u suprotnom.

Dokaz: Najpre pronađimo pokret M_0, takav da menja orijentacije dve proizvoljne ugaone kockice (npr. *drb* i *drf*), a zatim ga nadogradimo drugim pokretima da bismo dobili pokrete koji menjaju i orijentacije ostalih kockica. Jedan od takvih je:

$$(\mathrm{DR}^{-1})^3(\mathrm{D}^{-1}1\mathrm{R})^3$$

koji možemo prikazati i ciklusima

(*dfr rdf frd*) (*dbr rdb bdr*) (*df dr fr ur dr ub dl*)

Tako je $\phi_{\text{ugao}}(M_0) = 1$ i $\psi_{\text{ugao}}(M_0)$ = (*dbr rdb brd*) (*drf rfd fdr*). Dakle, ako je C_1 = *dbr* i C_2 = *drf*, lema je tačna. Spojimo ga sada sa drugim pokretima. Na osnovu leme 4. znamo da postoji $M \in G$ koji premešta *dbr* na poziciju C_1 a *drf* na poziciju C_2. Sada je $M' = M^{-1}M_0M$ takav da utiče na orijentacije ugaonih kockica ali ne utiče na ostale ugaone kockice. Analogno se dokazuje za proizvoljne ugaone kockice C_1 i C_2. QED.

Dokaz [Tvrđenje 2]: Pretpostavimo da je konfiguracija Rubikove kocke takva da najmanje dve ugaone kockice C_1 i C_2 nemaju odgovarajuću orijentaciju. Po prethodnoj lemi postoji pokret koji rotira C_1 u smeru kazaljke na satu, a C_2 u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu a ne utče na ostale kockice. Primenjujući ovaj pokret jednom ili dva puta, možemo da budemo sigurni da C_1 ima ispravnu orijentaciju. Kako nismo uticali na ostale kockice, sada imamo jednu kockicu manje sa neispravnom orijentacijom. Ponavljajući ovaj postupak dolazimo do konfiguracije $(1, \tau', x', y')$ gde je najviše jedana kockica sa neispravnom orijentacijom, tj. najmanje sedam x_i vrede 0. Kako po lemi važi $\Sigma x_i \equiv \Sigma x_i'$ (mod 3) sledi da je i poslednje $x_i = 0$, tj. konfiguracija kocke je $(1, \tau', 0, y')$. Iz Leme 2 sledi da ovim transformacijama permutacija τ' ne menja svoje znak, a iz Leme 3 sledi da se $\Sigma y_i'$ ne menja. QED.

Sada dokažimo Tvrđenje 3. tj. želimo da popravimo pozicije ivičnih kockica. U ovom slučaju koristimo pokrete kojima nećemo poremetiti već složene ugaone kockice.

Lema 6. Slika funkcije $\phi_{\text{ivica}} |\ker \psi_{\text{ugao}} : \ker \psi_{\text{ugao}} \to S_{12}$ sadrži A_{12}. ($\phi' = \phi \,|\, G'$ naziva se restrikcijom funkcije ϕ sa G na G', gde je G' podskup od G i definisana je kao $\phi: G' \to H$, gde je $\phi'(g) = \phi(g)$).

Dokaz [Tvrđenje 3]: Postoji pokret

$M_0 = LR^{-1}U^2L^{-1}RB^2$

gde $M_0 \in \ker \psi_{ugao}$ i $\phi_{ivica} = (ub\ uf\ db)$. Ako su C_1, C_2 i C_3 bilo koje tri ivične kockice, tada na osnovu Leme 6 postoji pokret M koji šalje ub na poziciju C_1, *uf* na poziciju C_2 i *db* na poziciju C_3, tako da ne utiče na promenu ostalih ivičnih kockica (ni na položaj ni na orijentaciju). Neka je $M' = M^{-1}M_0M$ tada $M' \in \ker \psi_{ugao}$ i $\phi_{ivica}(M') = (C_1\ C_2\ C_3)$. Ova procedura se se poovi najviše 4 puta i onda se dolazi do identičke permutacije. QED.

Lema 7. Ako su C_1 i C_2 ma koje dve ivične kockice, postoji pokret $M \in G$ koji menja orijentacije (ali ne i pozicije) C_1 i C_2 a nikako ne utiče na ostale kockice.

Dokaz: Poznato je da postoji bar jedan takav pokret: $LR^{-1}FLR^{-1}DLR^{-1}BLR^{-1}ULR^{-1}F^{-1}LR^{-1}D^{-1}$ $LR^{-1}B^{-1}LR^{-1}U^{-1}$. Nazovimo ovaj pokret M_0. Njegova kompozicija disjunktnih ciklusa je (*fu uf*) (*bu ub*). Tada, ako su C_1 i C_2 bilo koje dve različite ivične kockice postoji $M \in G$ koje šalje *uf* na poziciju C_1 a *ub* na poziciju C_2. Tada pokret $M' = MM_0M^{-1}$ menja orijentaciju C_1 i C_2, tako da pri tome ne utiče na ostale kockice.

Dokaz [Tvrđenje 4]: Za dokaz ovog tvrđenja uzimamo argument korišćen u dokazu Tvrđenja 2, tačnije pretpostavimo da je konfiguracija kocke takva da su najmanje dve ivične kockice pogrešno orijentisane. Primenjujući pokret iz prethodne leme, menjamo odjednom orijentaciju dveju ivičnih kockica. Ponavljajući ovaj postupak možemo preorijentisati svih dvanaest ivičnih kockica, i samim tim dobijemo krajnju konfiguraciju gde je y' = 0. QED.

Zaključak: Iako smo ranije zaključili da je broj svih mogućih konfiguracija $8!3^8 12!2^{12}$, Teorema 5 kaže da od njih samo $\frac{1}{2}$ zadovoljava prvi uslov, $\frac{1}{3}$ zadovoljava drugi uslov, a $\frac{1}{2}$ zadovoljava treći uslov. Sledi da je broj važećih konfiguracija $\frac{1}{12}$ od kombinatornog broja, a to iznosi $8!3^7 12!\,2^{10}$.

Uopštavanje broja konfiguracija za kocku oblika $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$

Kombinatorno moguć broj konfiguracija

Probajmo da izračunamo broj konfiguracija u opštem slučaju za neparan broj kockica na jednoj ivici, tj. Za kocku $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$, gde je $k \in N$. Kod ovakvih kocki postoje ugaone i centralno-ivične kockice koje imaju ista svojstva kao i kod Rubikove kocke. Uz to, postoje i specijalni tipovi centralnih i ostalih ivičnih, necentralnih kockica. Slično kao i za kocku 3×3×3 možemo zaključiti da pokretima stranica i venaca ne možemo pomeriti centralnu kockicu, tj. da je ona nepoktrena.

Teorema 6. Pokretanjem strana i venaca kocke svaku kockicu možemo premestiti samo na mesto kockice istog tipa.

Dokaz: Zaključimo prvo da ugaone kockice, s obzirom das u jedini tip kockica sa tri vidljive strane mogu naći samo na mestima drugih ugaonih kockica. Posmatrajmo jednu proizvoljnu stranu oblika $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$, $k \in Z$. Na toj strani uočimo takođe proizvoljnu centralno-ivičnu kockicu. Nju možemo premestiti na drugu poziciju na tri načina. Rotiranjem strane i rotiranjem venaca u čijem preseku se ona nalazi. Kako se svim ovim pomeranjima (za bilo koji ugao) ona ponovo dovodi na mesto druge centralno-ivične kockice i kako je izabrana potpuno proizvoljno, sledi da se kockice ovog tipa mogu permutovati samo na pozicije kockica tog istog tipa. Posmatrajmo sada sve necentrlne ivične kockice koje su na proizvoljnoj strain kocke i gde je svaka od njih na proizvoljno jednakom rastojanju od temena kocke. Ovakvih kockica ima ukupno osam na jednoj strani. Uočimo jednu od njih. Ona se takodje kao i centralno-ivična može jednim potezom pomeriti na tri načina.Svaki od ovih načina je dovodi na poziciju neke od drugih necentralno-ivičnih kockica koje su na nekom proizvoljnom rastojanju od temena. Kako je sve odabrano na proizvoljana način, to se ovakve kockice mogu permutovati samo na mestima drugih kockica sa istom osobinom, tj. sve one su istog tipa. Analogno posmatrajući centralne dolazimo do istih zaključaka. QED.

Teorema 7. Moguće su i parne i neparne permutacije necentralno – ivičnih i centralnih kockica pri čemu ne postoji zavisnost parnosti njihovih permutacija i permutacija ostalih tipova.

Teorema 8. Dve uparene necentralno-ivične kockice se razlikuju, pa ne mogu da zamene mesta, a da pri tome ne promene i orijentaciju.

Ugaone kockice se nalaze u temenima kocke pa njih ima osam i sve su istog tipa. Centralno-ivičnih kockica ima 12 (po jedna na svakoj ivici) i one takođe pripadaju istom tipu. Sada posmatrajmo ivične necentralne kockice na jednoj proizvoljnoj strani kocke. Krećući se od ugaonih kockica sa suprotnog temena jedne ivice, uparujemo po dve ivične kockice koje su jednako udaljene od temena. Svaki par čine kockice istog tipa. Skup svih parova na svim ivicama kocke koji su jednako udaljeni od ugaonih čine jedan tip ivičnih kockica. Za posmatranu kocku $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$, na jednoj ivici kocke imamo $\frac{(2k+1)-1-2}{2}=k-1$ tipova necentralnih ivičnih, gde od $2k+1$ kockica koliko ih ukupno ima na jednoj ivici oduzimamamo dve ugaone i jednu centrlno-ivičnu a onda podelimo sa 2, jer po jedan par čine tip. Na jednoj ivici imamo po dve ivične kockice istog tipa, odnosno na jednoj strani osam njih. Odavde sledi da će ukupan broj kockica istog tipa biti $(8\cdot 6) / 2 = 24$, gde delimo sa dva jer svaka ivična kockica pripada dvema stranama, pa je dva puta uračunata u ukupan broj. Kod kocke čiji je broj kockica na strani za dva veći od posmatrane $(2k + 3)$ one će sada postati centralne kockice, s obzirom da im je samo jedna strana vidljiva. Iz ovog tvrđenja sledi da je broj kockica u okviru jednog tipa centralnih kockica nastalih od ivičnih necentralnih jednak četiri. Po jedan tip čine i centralne nastale od ugaonih i centralno-ivičnih, kojih takođe ima po četiri. Dakle ako posmatramo kocku $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$ broj svih njenih centralnih kockica biće $(2k-1)^2$, a kako svakom tipu pripadaju po četiri sledi da je broj tipova centralnih kockica $\frac{(2k-1)^2-1}{4}=k(k-1)$. Dakle ukupan broj tipova kod kocke $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$ računamo kao zbir broja tipova centralnih $k(k-1)$, ivičnih necentralnih $k-1$ i još dva tipa koja odgovaraju ugaonim i centralno-ivičnim kockicama, odnosno, konačno dobijamo $k(k-1)+k-1+2 = k(k-1)+k+1$.

Koristeći prethodna objašnjenja možemo izvesti kombinatorno moguć broj konfiguracija kocke $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$.

Posmatrajmo jedno teme kocke. U njemu se može nalaziti bilo koja od osam ugaonih kockica. Na drugo mesto možemo staviti bilo koju od sedam preostalih kockica. Idući tako dalje, slično kao za Rubikovu kocku dobijamo da je broj različitih permutacija ugaonih kckica 8!. Kako svaka od njih može biti orijentisana na tri načina, to slično Rubikovoj kocki dobijamo da je broj različitih kombinacija orijentacija ugaonih kockica 3^8.

Uočimo sada centralno-ivične kockice. Njih ima ukupno 12. Na prvom od 12 centralno-ivičnih mesta može stajati bilo koja od 12 centralno-ivičnih kockica, na drugom bilo koja od 11 preostalih, i tako sve do poslednje, pa se one mogu rasporediti na 12! načina. Slično ivičnim kockicama Rubikove kocke, svaka od njih se može orijentisati na dva načina, pa je ukupan broj kombinacija orijentacija centralno – ivičnih kockica 2^{12}.

Ivičnih necentralnih kockica ima po 24 svakog tipa, a po teoremi imamo da se njihova orijentacija ne može menjati, pa se one međusobno mogu permutovati na 24! načina. Ranije je rečeno da je broj tipova ovih kockica jednak $k-1$, što dalje znači da je ukupan broj permutacija necentralnih ivičnih kockica $24!^{k-1}$.

Centralnih kockica je takođe po 24 svakog tipa (po četiri na svakoj strani), pa bi broj permutacija za jedan tip bio 24!. Ali, usled postojanja identičnih centralnih pločica ista konfiguracija strane javljaće se 4! puta , tj. $4!^6$ puta za celu kocku, pa je broj različitih permutacija centralnih ivica jednak $24!/4!^6$. Kako imamo $k(k-1)$ različitih tipova, ukupan broj svih permutacija centralnih ivica kocke biće $\left(\frac{24!}{4!^6}\right)^{k(k-1)}$.

Konačno, broj kombinatorno mogućih konfiguracija kocke $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$ iznosi $\frac{8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{12}\cdot 24!^{k-1}\cdot 24!^{k(k-1)}}{(4!^6)^{k(k-1)}}$.

Za kocku $(2k+1)\times(2k+1)\times(2k+1)$ važe uslovi Teoreme 5:

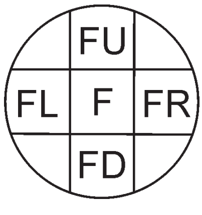
- $\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\tau)$
- $\Sigma x_i \equiv 0 \pmod 3$
- $\Sigma y_i \equiv 0 \pmod 2$

gde bi σ predstavljala permutaciu ugaonih, a τ permutaciju centralno-ivičnih kockica, a x i y njihove orijentacije. Iz teorema 7 i 8 sledi da je kombinatorno moguć broj konfiguracija necentralno-ivičnih i centralnih kockica jednak broju validnih konfiguracija ovih tipova. Zaključujemo da je, kao i kod Rubikove kocke broj validnih jednak dvanaestini ukupnog broja kombinatorno mogućeg broja konfiguracija odnosno:

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{12}\cdot 24!^{k-1}\cdot 24!^{k(k-1)}}{(4!^6)^{k(k-1)}}.$$

Magična sfera

Magična sfera poput kocke ima šest strana, ali u ovom slučaju oblika kruga, sastavljenih od dcvet pločica iste boje. Njihov ukupan broj je 9 · 6 = 54. Primenimo Teoremu 1 na sferu. Neka je skup $S = \{F, D, B, U, R, L\} \in G$. Tada svaki pokret M zadovoljava osobinu da zadržava sve ugaone pločice iste boje u ugaonicima (mestima na kojima se nalaze ugaone pločice) koji odgovaraju istoj boji. Ako su pokreti M_1 i M_2 takvi da važi $M_1, M_2 \in G$ i ova osobina, onda će ona važiti i za pokret $M_1 * M_2$. Kako važi $G = \langle S\rangle$, važiće i da svaka permutacija skupa G čuva ugaone pločice u njihovim ugaonicima. Notaciju strana ćemo preuzeti od kocke dakle: *r* (right), *l* (left), *u* (up), *d* (down), *f* (front) i *b* (back) desnu, levu, gornju, donju, prednju i zadnju stranu magične sfere. Centralne pločice na svakoj strani označavaćemo slovom strane na kojoj se nalazi. Ostale će imati dvoslovnu oznaku – prvo i dalje za stranu na kojoj se nalazi, a drugo za stranu sa kojom se dodiruje:



Za postojeća tri venca koristićemo obeležavanje *urw* (up-right wreath), *ufw* (up-front wreath) i *rfw* (right-front wreath) za gornji desni, gornji prednji i desni prednji venac.

Sada ćemo definisati i rotacije pomoću kojih se menja položaj pločica sfere. Što se tiče strana notacija je ista kao i za Rubikovu kocku: slovima R, L, U, D, F, B označavaćemo rotacije odredjenih strana za 90° u smeru kazaljke na satu. Pri tome, rotacija u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu (R′, L′, U′, D′, F′, B′) bila bi isto što i triput okretanje u smeru kazalje na satu (R^3, L^3, U^3, D^3, F^3, B^3). Središnje vence možemo posmatrati kao vence koji spajaju gornju i desnu, gornju i prednju, odnosno desnu i prednju stranu. Njih, za razliku od strana možemo okretati za 30°, 60°…, 360° (jer se svakom rotacijom venac može okretati za po jednu pločicu). WUR^k, WUF^k i WRF^k biće oznake za rotaciju venaca za 30°, gde k predstavlja broj rotacija. Definišimo pozitivne smerove rotacije venaca u smeru kazaljke na satu. Ukoliko je $k = 12$ venac se vraća u početnu poziciju.

Iz toga sledi da kod sfere postoji 9 osnovnih generatora $G = \langle S\rangle$, gde je $S = \{F, D, B, U, R, L, WUR, WUF, WRF\}$.

Želimo da utvrdimo šta se dešava sa pločicama pri pokretima strana i venaca, tj. želimo da opišemo gde se svaka pločica nakon određenog pokreta premešta, koristeći cikluse. Pokažimo to sada na primeru jedne strane (*f*) i jednog venca (*frw*). Pokretom F vršimo permutaciju prikazanu ciklusom (*fu fr fd fl*), a pokretom FRW permutaciju (*fr f fl lf l lb bl b br rb r rf*).

Dokaz da je sfera zaista grupa, analogan je dokazu za Rubikovu kocku.

Primetimo sada par osobina sfere koje se ne razlikuju od kocke:

1. Neka su M_1 i M_2 takvi da važi $M_1, M_2 \in (G, *)$ tada ne važi $M_1 * M_2 = M_2 * M_1$, tj. operacija * grupe G nije komutativna.

2. Neka je sfera u početnoj „rešenoj" konfiguraciji i M_1 i M_2 takvi da važi $M_1, M_2 \in (G, *)$. Ponavljajmo na sferi kombinaciju $M_1 * M_2$ nekih n puta. Nakon tih n puta sfera će se vratiti u početno stanje (konfiguraciju).

Kako su kod sfere po četiri ugaone pločice nepokretne, ukupno imamo 54 – 24 = 30 pokretnih pločica. Numerišimo ih brojevima od 1 do 30.

Teorema 9. Kod sfere postoji samo jedna orbita, odnosno kombinatorni broj konfiguracija je ujedno i važeći broj konfiguracija.

Dokaz: Ovo dokazujemo time što utvrdimo da se odgovarajućim algoritmom iz bilo koje pozicije može može doći do rešene konfiguracije. Objasnimo koji je postupak rešavanja sfere.

- Najpre uredimo centralne pločice, tako da boja svake odgovara boji ugaonih pločica na strani na kojoj se nalazi. Algoritam za ovakav raspored pločica je vrlo jednostavan.
- Kada uredimo centralne, potrebno je urediti i ostale pokretne pločice. Osnovna ideja postupka je zamena pločica koje se nalaze jedna

do druge, a na susednim su stranama. To postižemo tako što prvo rotiramo jednu od strana za 90°. Zatim venac odredjen tim dvema stranama za 30° tako da pločica sa nerotirane strane pređe na rotiranu stranu. Nakon toga na rotiranoj strani izvršimo njoj inverznu rotaciju. A zatim izvršimo i inverznu rotaciju već pokretanog venca.

Kako se na mestu centralnih pločica može naći bilo koja od 30 numerisanih, a iz prethodne stavke sledi da bilo koje dve necentralne možemo zameniti, zaključujemo da se bilo koja pokretna pločica može naći na bilo kojoj poziciji, odnosno da se iz bilo koje pozicije može doći do rešene. Ovim smo dokazali da sfera ima samo jednu orbitu. QED.

Za razliku od kocke kod koje postoje orientisane kockice, kod sfere je svaka pločica zasebna, pa samim tim se ne postavlja pitanje orijentisanosti. Ali postoji po 5 identičnih pločica od svake boje. Među permutacijama tih pločica javljaju se identične konfiguracije usled postojanja jednakih pločica. Izračunajmo prvo broj permutacija, smatrajući sve pločice različitim, a onda otkrijmo koliko puta se te identične konfiguracije ponavljaju.

Kako na prvu poziciju možemo da stavimo bilo koju od 30 pločica, na drugu bilo koju od preostalih 29..., na tridesetu poziciju samo jednu preostalu, ukupan broj konfiguracija kada bi sve pločice bile različite bi bio $30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 30!$. Ako posmatramo rešenu sferu, ona će se ponavljati isti broj puta kao i bilo koja druga konfiguracija. Kako su njene pločice numerisane, na prvu poziciju možemo postaviti bilo koju od 5 iste boje, na drugu bilo koju od preostale četiri...na petu preostalu jednu. Dakle ovakva struktura strane će se ponoviti 5! puta. Kako imamo šest strana to će se rešena konfiguracija sfere ponoviti $5!^6$ puta. Zaključujemo da je broj različitih konfiguracija sfere $(30!) / (5!^6)$.

Zaključak

Primenom teorije grupa izračunato je da je broj validnih konfiguracija manji od broja koji se dobije kombinatornim metodom. Ipak, taj broj je i dalje suviše veliki, pa bi nasumično slaganje kocke bilo gotovo nemoguće.

Korišćena literatura

Chen J. Group theory and Rubik's Cube. Dostupno na: http://www.math.harward.edu/…/Group Theory and the Rubik's Cube.pdf

Conrad K. 15-puzzle (and Rubik's Cube). Dostupno na: http://www.math.uconn.edu/kconrad/blurbs/grouptheory/15puzzle.pdf

Davis T. Group theory via Rubik's Cube. Dostupno na: http://www.geometer.org/rubik/group.pdf

Ristanović D. 1982. *Mađarska kocka*. Beograd: Beogradski izdavačko grafički zavod, specijalno izdanje časopisa „Galaksija"

Ana Spasojević and Petra Antić

Determination of Number of Configurations of Rubik's Cube and Magic Sphere Using Group Theory

In this paper a group of operations on Rubik's Cube is defined and some properties are described, by using the group theory. The theoretically possible number of configurations is calculated. There is also a special way of presenting the configuration of the cube using permutations. In the end, the theory about the necessary conditions of a configuration was proven. That led to the conclusion that only part of the theoretically possible configurations can be reached by applying moves on a solved Rubik's Cube. A similar procedure is applied for calculating the number of configurations on the Magic sphere.