Aleksandra Lekić i Nenad Milutinović

Simulacija za računanje kapacitivnosti fraktalnog kondenzatora

Cilj ovog rada bio je da koristeći metod relaksacije rešenja računa raspodelu potencijala na ploči kondenzatora. Ploča kondenzatora je fraktalnog oblika. Simulacija je izvedena u programskom jeziku C. Raspodela naelektrisanja računa se koristeći raspodelu potencijala. Simulacijom se takođe računa i kapacitivnost fraktalnog kondenzatora. Ideja je da se kapacitivnost fraktalnog uporedi sa pločastim kondenzatorom.

Uvod

Fraktali

Fraktal je geometrijski oblik koji može biti podeljen u delove, od kojih je svaki minijaturna kopija celine. Dobijaju se beskonačnim uzastopnim primenjivanjem funkcije na prethodno dobijeno rešenje te funkcije, iterativnim postupkom. Njihov obim je beskonačno dug, ali je površina konačna. Fraktali se dele na potpuno samoslične, kvazi samoslične i stohastično samoslične. Kod potpuno samosličnih fraktala svaki manji deo je jednak celini. Kvazi samoslični fraktali sadrže i neke delove koji nisu samoslični, a stohastično samoslični nisu samoslični, ali način njihovog dobijanja jeste. U ovom radu su korišćeni potpuno samoslični L fraktali.

Fraktalni kondenzator

U cilju povećanja kapacitivnosti kondenzatora koriste se provodnici fraktalnog oblika zbog njihovog značajno većeg obima. Njihova prednost je to što se veća kapacitivnost ostvaruje na manjoj površini.

Simulacijom se određuje raspodela potencijala i naelektrisanja fraktalnog provodnika unutar zatvorene provodne kutije kako bi se izračunala kapacitivnost. Raspodelu naelektrisanja nije uvek moguće odrediti analitički, stoga se koriste odgovarajuće numeričke metode. Postoji više metoda koje to omogućavaju: metod konformnog preslikavanja, disperzioni metod i relaksacioni metod. U našoj simulaciji korišćen je relaksacioni metod.

Ako je gustina naelektrisanja provodnika ρ važi Poisonova jednačina:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Ona povezuje potencijal električnog polja i gustinu naelektrisanja svake tačke provodnika. U tačkama u kojima je $\rho = 0$ jednačina ima oblik:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Ova jednačina naziva se još i Laplasova jednačina. Jedna od osobina relaksacionog metoda je da se potencijal u jednoj tački, u kojoj je naelektrisanje jednako nuli, računa na osnovu potencijala njegove okoline.

U trodimenzionalnom sistemu, okolina je predstavljena sa šest tačaka. Laplasova jednačina se svodi na sledeći oblik (1):

$$\nabla^2 U = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 - 6U_0}{h^2} = 0$$

gde su U_1, …, U_6 potencijali tačaka koje su u okolini tačke na potencijalu (Stamenov 1998). Najpre se svakoj tački u kojoj je naelektrisanje nula dodeli proizvoljna vrednost potencijala U_0, a potom se pomoću prethodne jednačine iterativnim postupkom računa potencijal svake tačke na osnovu

Aleksandra Lekić (1989), Obrenovac, Radenka Rankovića 6, učenica 4. razreda Gimnazije u Obrenovcu

Nenad Milutinović (1989), Beograd, Mine Vukomanovic 5, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

njene okoline. Potencijal svake tačke u bilo kojoj iteraciji računa se na osnovu potencijala šest okolnih potencijala. Postupak se ponavlja sve dok ne bude zadovoljena unapred zadata tačnost, odnosno dok se izračunata vrednost potencijala u dve uzastopne iteracije promeni za manje od željene tačnosti.

Nakon određivanja potencijala izračunava se jačina električnog polja po jednačini:

$$\mathbf{E} = -\nabla U = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{2}$$

Na osnovu intenziteta električnog polja:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

može se izračunati naelektrisanje Δq na elementarnoj površini ΔS:

$$\Delta q = \sigma \cdot \Delta S \tag{3}$$

Iz dobijene raspodele naelektrisanja na provodniku, primenom formule:

$$C = \frac{\sum \Delta q}{U} \tag{4}$$

dobija se kapacitivnost kondenzatora.

Provera tačnosti simulacije izvršena je izračunavanjem kapacitivnosti pločastog kondenzatora i uporednim računanjem kapacitivnosti pomoću formule:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}. \tag{5}$$

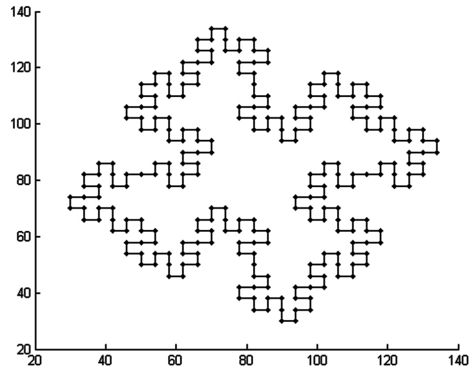
Rezultati

Određivanje kapacitivnosti fraktalnog kondenzatora podeljeno je u dve faze – generisanje fraktala i određivanje raspodele naelektrisanja. Generisani fraktal prikazan je na slici 1. Ostali fraktali generisani su usložnjavanjem ovog fraktala povećavanjem broja iteracija. Sistem u kome se nalazi provodnik predstavljen je zatvorenom kutijom čije su ivice na potencijalu nula. Provodnik se nalazi na unapred zadatoj udaljenosti od horizontalnih ravni kutije.

Dvodimenzionalni sistem u kom se nalazi provodnik je predstavljen matricom 150×150, a trodimenzionalni sistem matricom 150×150×50.

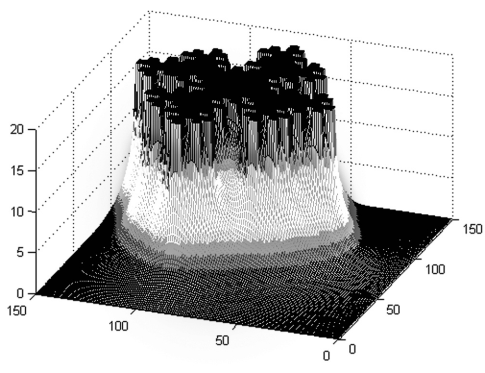
Provodnik je na poznatom i fiksnom potencijalu. U toku izvršavanja relaksacionog algoritma menjaju se samo potencijali u oblasti okoline provodnika. Oblastima unutar „kutije" u kojima je naelektrisanje nula, odnosno praznom prostoru, dodeljuje se proizvoljna vrednost potencijala. Međutim, radi brže konvergencije iterativnog postupka, potencijal oblasti uzima vrednosti od nule do potencijala provodnika. Novo naelektrisanje u svakoj oblasti računato je kao srednja vrednost šest potencijala okolnih tačaka. Postupak je ponovljan sve dok maksimalna razlika između dve iteracije ne bude manja od 10^{-8}. Na slici 2 je prikazana raspodela potencijala na provodniku i oko njega za fraktal sa slike 1.

Dobijeni potencijal koristi se za računanje raspodele naelektrisanja na provodniku jednačinom (2). Na slici 3 je prikazana raspodela naelektrisanja fraktala sa slike 1. Nalektrisanje na elementarnoj površi dobija se iz jednačine (3) dok se kapacitivnost kondenzatora dobija iz (4).



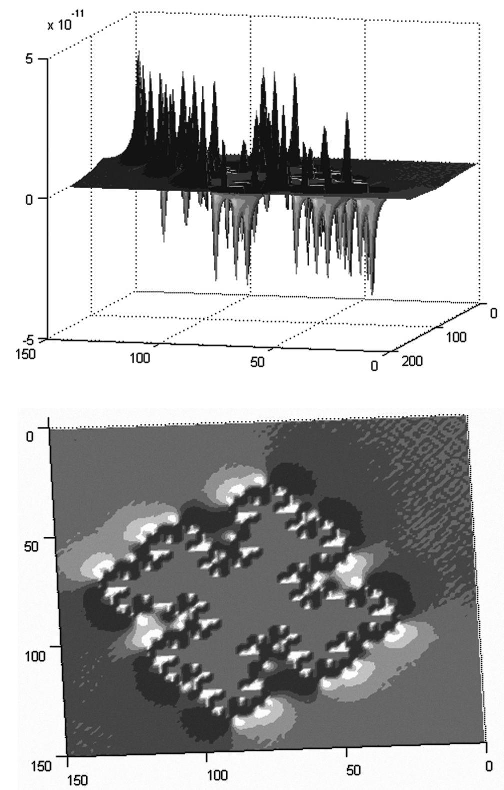
Slika 1. Generisani fraktal

Figure 1. Generated fractal



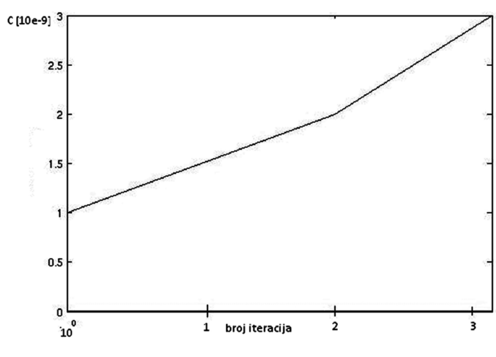
Slika 2. Raspodela potencijala

Figure 2. Potential distribution



Slika 3. Raspodela naelektrisanja

Figure 3. Charge distribution



Slika 4. Zavisnost kapacitivnosti od broja iteracija

Figure 4. Capacitance *vs*. number of iterations

Provera rezultata dobijenog simulacijom izvršena je test primerom. Umesto fraktalnog simuliran je pločasti kondenzator. Kapacitivnost pločastog kondenzatora izračunata je korišćenjem simulacije, a i na osnovu (5). Upoređivanjem dobijenih vrednosti utvrđena je apsolutna greska reda veličine 10^{-11} F.

Na slici 4 prikazana je zavisnost kapacitivnosti od složenosti fraktala, odnosno broja iteracija. Iako se sa povećavanjem broja iteracija površina smanjuje, kapacitivnost se povećava. Takva pojava se objašnjava velikim obimom ploče fraktalnog oblika.

Zaključak

Simulacijom je pokazano da fraktalni kondenzatori imaju veću kapacitivnost od pločastih kondenzatora iste površine. Pokazano je da su rezultati simulacije u skladu sa očekivanjima. Moguća poboljšanja odnose se na preciznost i smanjivanje vremena simulacije, što bi se moglo postići dinamičkim usitnjavanjem simulacione mreže.

Literatura

Mandelbrot B. B. 1983. *The fractal geometry of nature*. New York: Free-man

Stamenov I. 1998. Određivanje parametara polja proizvoljnih sistema naelektrisanih provodnih tela. *Petničke sveske*, 48: 68.

Samavati, H., Hajimiri, A., Shahani, A., Lee, T. Fractal capacitors. Dostupno (1. 10. 2008) na: http://smirc.stanford.edu/papers/isscc98p-Hirad.pdf

Aleksandra Lekić and Nenad Milutinović

Simulation for Counting Capacitance of Fractal Capacitors

The aim of this project is to count the distribution of potentials on capacitor plates using the relaxing metod. Capacitor plates have a fractal structure. The simulation is made in program language C. Distribution of electric arc charge is counted using the distribution of potentials. Capacitance of fractal capacitor is counted using a simulation. The idea is to compare the capacitance of fractal capacitor with the capacitance of plate capacitor.