Erna Oklapi i Sanela Numanović

Određivanje i primena sopstvenih vrednosti

U ovom radu su predstavljene numeričke metode za određivanje sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora. Razmotrene su metode za lokalizaciju, određivanje dominantne sopstvene vrednosti i određivanje svih sopstvenih vrednosti simetrične matrice. Opisana je primena u izračunavanju Page Rank vrednosti kao jedna od najrasprostranjenijih.

1. Uvod

Sopstvene vrednosti i vektori su karakteristika kvadratnih matrica, pa samim tim zauzimaju značajno mesto u teorijskoj, ali i primenjenoj matematici. U radu ćemo opisati lokalizaciju sopstvenih vrednosti pomoću Grešgorinovih diskova. Na osnovu metode stepenovanja koja omogućava izračunavanje dominantne sopstvene vrednosti izvedena je formula na osnovu koje se problem izračunavanja ostalih sopstvenih vrednosti svodi na problem dominantne vrednosti. Pored navedenih primena sopstvenih vrednosti dokazana je i primena u Google algoritmu za pretraživanje.

2. Sopstvene vrednosti i vektori

Definicija 1. Sopstvena vrednost matrice A je realan broj λ ako matrična jednačina:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

ima netrivijalno rešenje koje nazivamo sopstveni vektor.

Definicija 2. Skup svih sopstvenih vrednosti jedne matrice naziva se spektar te matrice. Neke osobine sopstvenih vrednosti:

1. Ako je $\vec{x}$ sopstveni vektor matrice A, onda je skalar λ koji je odgovarajuća sopstvena vrednost vektoru $\vec{x}$ jedinstven.

2. Sopstvenoj vrednosti λ matrice A može odgovarati više sopstvenih vektora.

Lema 1. Sopstveni vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su linearno nezavisni.

Dokaz: Tvrđenje je tačno za $n = 1$, po definiciji važi $\lambda_1 x_1 = 0$. Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno za bilo koji sistem od $n-1$ sopstvenih vektora, a da nije tačno za n. Dakle pretpostavimo da je sistem od n vektora, sistem linearno zavisnih vektora, što znači da postoje skalari $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da je:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0 \qquad (*)$$

a da svi skalari nisu istovremeno jednaki nuli.

Na primer neka je $a_1 = 0$. Kako je $Au_k = \lambda u_k$ ($k = 1, 2, \ldots n$), primenom operatora A na jednakost (*) dobijamo:

$$a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + a_n \lambda_n u_n = 0 \qquad (**)$$

S druge strane množenjem (*) jednakosti sa $-\lambda_n$ i sabiranjem sa (**), dobijamo:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n)u_1 + a_2(\lambda_1 - \lambda_n)u_1 + \ldots$$
$$\ldots + a(\lambda_{n-1} - \lambda_n)u_{n-1} = 0$$

Kako je po pretpostavci, svaki sistem od $n-1$ sopstvenih vektora linearno nezavisan, zaključujemo da svi koeficijenti u prethodnoj jednakosti moraju biti jednaki nuli pa je i $a(\lambda_1 - \lambda_1) = 0$, što protivureči prretpostavci da je $a_1 = 0$. Sledi da je sistem od

Erna Oklapi (1989), Novi Pazar, Kompleks Jezero b/11, učenica 4. razreda Gimnazije u Novom Pazaru

Sanela Numanović (1990), Žabare (Kruševac), učenica 3. razreda Gimnazije u Kruševcu

MENTOR: Andreja Ilić, Niš, student 3. godine PMF u Nišu

n vektora linearno nezavistan. Neposredna posledica prethodne teoreme je sledeća teorema koju nećemo dokazivati.

Teorema 1. Neka je X n-dimenzionalni linearni prostor. Linearni operator $A : X \to X$ ne može imati više od n međusobno različitih sopstvenih vrednosti.

3. Karakteristični polinomi

Jednačinu $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ možemo napisati u obliku:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

gde je I jedinična matrica. Interesuju nas netrivijalna rešenja ove jednačine, a ona su netrivijalna ukoliko je determinanta datog sistema jednačine jednaka nuli, to jest:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Definicija 3. Ako je A kvadratna matrica, matrica $A - \lambda I$ je njena karakteristična matrica. Polinom $|A - \lambda I|$ je njen karakteristični polinom i jednačina $|A - \lambda I| = 0$ je njena karakteristična jednačina.

Leverijev je predstavio metodu određivanja karakterističnog polinoma preko tragova stepenovanih matrica. Međutim ovaj postupak zahteva dugo izračunavanje, pa je iz tog razloga postojala potreba da se pronađe metoda koja će brže odrediti koeficijente karakterističnog polinoma $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Fadejev je izmenio Leverijev postupak i uspeo da smanji broj operacija za izračunavanja koeficijenata karakterističnog polinoma.

Fadejeva metoda umesto $A^1, A^2, \ldots, A^n$ izračunava $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pomoću sledećih formula:

$$A_1 = A,\ \mathrm{tr}A_1 = p_1,\ B_1 = A_1 - p_1 I$$

$$A_2 = AB_1,\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}A_2 = p_2,\ B_2 = A_2 - p_2 I$$

$$\ldots$$

$$A_{n-1} = AB_{n-2},\ \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}A_{n-1} = p_n,\ B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1} I$$

$$A_n = AB_{n-1},\ \frac{1}{n}\mathrm{tr}A_n = p_n,\ B_n = A_n - p_n I$$

Gde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ predstavljaju koeficijente karakterističnog polinoma po λ. Nule ovog polinoma su sopstvene vrednosti date matrice.

4. Metoda stepenovanja

Ovom metodom se sopstvene vrednosti i sopstveni vektori nalaze pomoću stepenovanih matrica. U daljem tekstu je opisana realizacija ove metode.

Data je kvadratna matrica A_{nn}. Treba odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore. Za matricu A važe sledeći uslovi:

1. A_{nn} ima n linearno nezavisnih vektora.
2. Sopstvene vrednosti se po veličini mogu predstaviti na sledeći način:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

Ako je moguće dobiti ovakav raspored onda je sopstvena vrednost $|\lambda_1|$ dominantno sopstvena vrednost matrice A. Predpostavimo da A zadovoljava uslove 1. i 2. Ako je x_0 bilo koji vektor koje se može predstaviti na sledeći način:

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

gde je $v_1, \ldots, v_n$ skup linearno nezavisnih vektora, tada je:

$$Ax_0 = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + c_n \lambda_n v_n$$

$$A^2x_0 = c_1\lambda_1^2 v_1 + c_2\lambda_2^2 v_2 + \ldots + c_n\lambda_n^2 v_n$$
$$\ldots$$
$$A^m x_0 = c_1\lambda_1^m v_1 + c_2\lambda_2^m v_2 + \ldots + c_n\lambda_n^m v_n$$

Ako podelimo poslednju jednačinu sa λ_1^m, dobijamo:

$$\frac{1}{\lambda_1^m} A^m x_0 = c_1 v_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m v_2 + \ldots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m v_n$$

Kada m postaje sve veće, koeficijenti $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m, \ldots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m$ se približavaju nuli. Stoga, za veliko m imamo:

$$\frac{1}{\lambda_1^m} A^m x_0 = c_1 v_1.$$

Sve dok je $c_1 \neq 0$, poslednja jednačina nam može dati vrednost λ_1 ($c_1 \neq 0$ ukoliko x_0 nije ortogonalno na v_1). Da bi sopstvena vrednost bila tačnija, posmatraćemo slučaj za $m + 1$ jer je $m + 1 > m$:

$$\frac{1}{\lambda_1^{m+1}} A^{m+1} x_0 = c_1 v_1$$

Ako obe strane poslednje dve jednačine pomonožimo sa y, što predstavlja bilo koji vektor koji nije ortogonalan sa v_1, imamo:

$$\frac{1}{\lambda_1^m}(A^m x_0 y) = c_1 v_1 y$$

$$\frac{1}{\lambda_1^{m+1}}(A^{m+1} x_0 y) = c_1 v_1 y$$

Izjednačavanjem dobijamo sledeće:

$$\frac{1}{\lambda_1^m}(A^m x_0 y) = \frac{1}{\lambda_1^{m+1}}(A^{m+1} x_0 y) = c_1 v_1 y$$

Deljenjem dobijamo:

$$\frac{A^{m+1} x_0 y}{A^m x_0 y} = \frac{\lambda_1^{m+1}}{\lambda_1^m} = \lambda_1$$

Poslednja jednakost predstavlja prvi korak u metodi stepenovanja. Za svaki sopstveni par (sopstvenu vrednost i sopstveni vektor) imamo:

$$A\upsilon = \lambda\upsilon$$

Ako pomnožimo sa υ, dobijamo:

$$\frac{A\upsilon \cdot \upsilon}{\upsilon \cdot \upsilon} = \lambda$$

Ako y iz $\frac{A^{m+1} x_0 y}{A^m x_0 y}$ predstavimo kao $y = A^m x_0$, onda imamo:

$$\lambda_1 = \frac{A^{m+1} x_0 \cdot A^m x_0}{A^m x_0 \cdot A^m x_0} = \frac{A(A^m x_0) \cdot A^m x_0}{A^m x_0 \cdot A^m x_0}$$

gde je $A^m x_0 = \upsilon$ što potvrđuje da je $A^m x_0$ sopstveni vektor koji odgovara λ_1.
Ova metoda nije uspešna u svim slučajevima. Postoje tri situacije u kojima ne funkcioniše pravilno:

1. Kada koristimo metodu na nedijagonalizibiranim matricama.
2. Kada matrica A_{nn} nema dominantnu sopstvenu vrednost ili kada je $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.
3. Ukoliko matrica A_{nn} u startu ima grešku.

Algoritam za korišćenje metode stepenovanja

Prvi korak: Ako vrednost:

$$\frac{A^{m+1}x_0 \cdot A^m x_0}{A^m x_0 \cdot A^m x_0}$$

odgovara sopstvenoj vrednosti λ_1 onda se prelazi na drugi korak.
Drugi korak: Proveriti da li je $(\lambda_1, A^m x_0)$ sopstveni par jednačinom:

$$A(A^m x_0) = \lambda_1(A^m x_0)$$

Treci korak: Ako važi jednakost onda se $(\lambda_1, A^m x_0)$ uzima za sopstveni par.

Ovaj postupak se može na ovaj način koristiti sve dok znamo do kog stepena matrice A izračunavamo sopstvenu vrednost. Međutim, nismo u stanju da procenimo do kog stepena treba računati da bi izračunali što tačniju sopstvenu vrednost. Zato se metoda stepenovanja usložnjava. Sada treba naći odrednicu kada izračunavanje prestaje sa radom i da tu vrednost uzmemo kao najtačniju. Ako je λ_1^c izračunata vrednost u nekom koraku, a λ_1^t tačna vrednost, onda treba uzeti onu izračunatu vrednost kada je $\left|\lambda_1^c - \lambda_1^t\right|$ najmanje. Kako mi ne znamo vrednost λ_1^t, onda možemo samo izračunati koliko je $\left|\lambda_1^c - \lambda_1^t\right|$.
Kako je $\lambda_1^c = \dfrac{Ax \cdot x}{x \cdot x}$, imamo:

$$\left|\lambda_1^c - \lambda_1^t\right| \le \sqrt{\frac{Ax \cdot x}{x \cdot x} - \left(\lambda_1^c\right)^2}$$

Pošto se ovom metodom i dalje dobijaju velike greške jer na početku ne znamo λ_1^t onda je najbolje da izračunamo grešku preko već izračunatih sopstvenih vrednosti u stepenima n i $n+1$ sledećom formulom:

$$G_{n+1} = \frac{\left|\lambda_1^c n - \lambda_1^c(n+1)\right|}{\left|\lambda_1^c(n+1)\right|}$$

gde je G greška koju izračunavamo. Da bi greška bila manja, na svakom koraku dobijenu vrednost množimo recipročnim skalarom tako da najveći član u vektoru bude jednak jedinici. Ovim dobijamo novu vrednost koja umanjuje grešku, a ovo množenje nam omogućava svojstvo $Ax = \lambda x = \lambda kx$, gde je skalar k različit od nule.

U toku izračunavanja, metoda stepenovanja uzima onu sopstvenu vrednost koja ima manju grešku od one koju smo mi zadali. Na primer ako tražimo sopstvenu vrednost za $G < 0.002$, onda se uzima ona sopstvena vrednost koja ispunjava ovaj uslov.

Traženje nedominantne sopstvene vrednosti

Prethodnim je objašnjena metoda stepenovanja za traženje dominantne sopstvene vrednosti. Međutim, ova metoda se može koristiti i za izračunavanje neke druge sopstvene vrednosti. Pre korišćenja metode stepenovanja potrebno je eliminisati dominantnu sopstvenu vrednost, tj. svesti je na nulu. Ako imamo U_1 za koje važi da je $U_1 = \dfrac{\upsilon_1}{\left|\upsilon_1\right|}$, onda imamo:

$$B = A - \lambda_1 U_1 U_1^T$$

Korišćenjem ove formule dobijamo sledeće sopstvene vrednosti 0, λ_2, λ_3, …, λ_n i korišćenjem metode stepenovanja izračunavamo λ_2. Na isti ovaj način se mogu izračunati i druge sopstvene vrednosti. Mana ove metode je ta što ima veliki broj izračunavanja i predstavlja jedan dug proces za izračunavanje sopstvenih vrednosti.

5. Grešgorinovi diskovi

Teorema 2. $\lambda - a_{ii} \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. $i \in 1, \ldots, n$.

Dokaz: Neka je λ sopstvena vrednost i $x = x_j$ odgovarajuci sopstveni vektor. $i \in 1, 2, \ldots, n$ tako da je $x_i = \max|x_j|$. Tada je $|x_i| \geq 0$. x je sopstveni vektor i važi $Ax = \lambda x$ ili $\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i$, $\forall i \in 1, \ldots, n$.
Kada rastavimo ovu sumu, imamo:

$$\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i - a_{ii} x_i$$

Deljenjem jednakosti sa x_i dobijamo:

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij} a x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = d_i$$

Poslednja nejednakost važi jer važi $\frac{x_j}{x_i} \leq 1$, $\forall j \neq i$.

Definicija 4. Neka je $d_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Tada se skup $D_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq d_i\}$ zove i-ti Grešgorinov disk za matricu A. On ima poluprečnik d_i i centar u tački čije su koordinate realni deo a_{ii} i imaginarni deo a_{ii}.

Iz definicije vidimo da za matricu A_{nn} imamo n diskova u kompleksnoj ravni. Oni su centrirani u dijagonalnim elementima te matrice. Na osnovu prve teoreme iz ovog poglavlja znamo da svaka sopstvena vrednost pripada jednom od Grešgorinovih diskova, ali to nam ne govori da svaki disk sadrži sopstvenu vrednost.

Teorema 3. Svaka sopstvena vrednost matrice A pripada Grešgorinovom disku koji odgovara kolonama matrice A.

Dokaz: Prethodna teorema i definicija diskova daju diskove koji odgovaraju kolonama A, gde je A matrica čije sopstvene vrednosti posmatramo. Transponujmo tu matricu. Znamo da su sopstvene vrednosti matrice A jednake sopstvenim vrednostima matrice A^T. Dokaz ove teoreme je jednostavan, jer nakon transponovanja matrice članovi dijagonale ostaju na istoj poziciji, pa se karakteristični polinom te matrice ne menja, a samim tim ni sopstvene vrednosti. Dalji dokaz necemo navoditi.

Teorema 4. Podskup G od Grešgorinovih diskova nazivamo disjunktna grupa diskova ako ne postoji disk u grupi G koji seče disk koji ne pripada G. Ako disjunktna grupa G sadrži r nekocentričnih diskova, onda ima r realnih sopstvenih vrednosti.

Dokaz: Neka $A \in A_{nn}$. Definišimo $A'(p)$ kao matricu čiji su elementi van dijagonale pomnoženi promenljivom p, $p \in (0, 1)$. U $A'(0)$ ima Grešgorinovih diskova sa poluprečnikom 0, centriranih u dijagonalnim elementima. Sopstvene vrednosti su u tom slučaju jednake dijagonalnim elementima. p povećava Grešgorionove diskove, jer se povećava poluprečnik diskova baziranih nad $A'(p)$. Uz to se menjaju i sopstvene vrednosti. Ova pomeranja se mogu naći korišćenjem korena karakterističnog polinoma koji odgovara $A'(p)$.

Pomoću promenljive p i dijagonalnih elemenata nalazimo karakterističan polinom koji odgovara $A'(p)$ i koji je funkcija koja zavisi od x i p. Za $p \in (0, 1)$ karakteristični polinom će biti neprekidan na intervalu $(0, 1)$. Ako je karakteristični polinom neprekidan na tom intervalu onda će i njegovi koreni biti neprekidni na tom intervalu. Kako su sopstvene vrednosti nađene pomoću korena, promena koju sopstvena vrednost trpi je p (sopstvena vrednost se menja za p).

Ova teorema kaže da sopstvene vrednosti uvek pripadaju jednom od diskova, a da na osnovu neprekidnosti traga sopstvenih vrednosti nemamo mogućnost da sopstvena vrednost bude promenom parametra premeštena iz disjunktne grupe u disjunktnu grupu. To znači da ukoliko ima r disjunktnih diskova, ima r sopstvenih vrednosti koje im pripadaju.

Teorema 5. Ako A_{nn} sadrži disjunktan Grešgorinov disk D_i kreiran od kolone matrice sa realnim dijagonalnim elementom, onda je sopstvena vrednost koja pripada disku D_i realna.

Dokaz: Neka je disk D_i disjunktan u odnosu na ostale Grešgorinove diskove matrice A i neka je λ_i sopstvena vrednost koja mu odgovara. Pretpostavimo da je λ_i oblika $p + iq$. Tada i broj $p - iq$ pripada disku D_i, jer je to λ, i ukoliko je jedan od njih koren karakterističnog polinoma, onda je i drugi. S obzirom da im je rastojanje od centra diska isto, oni moraju pripadati istom disku, što je kontradikcija, jer disku D_i pripada samo jedna sopstvena vrednost.

6. Page Rank

Page Rank vrednost je vrednost koju Google dodeljuje stranici i na osnovu koje vrši efikasnije pretraživanje. Cilj svake stranice je da ima što veću Page Rank vrednost što joj obećava veliku posećenost i citiranje. Page Rank web stranice označava verovatnoću da ćemo nasumičnim odabirom stranica doći baš do te stranice. Ta verovatnoća zavisi od broja stranica koje je citiraju, tj. imaju link na nju, odnosno od njihovih Page Rank vrednosti. Page Rank skupa stranica je raspodela verovatnoće i može se izračunati za bilo koji skup stranica. Na samom početku algoritma određivanja Page Rank vrednosti verovatnoća je ravnomerno raspoređena.

Primer 1: Imamo skup od 4 web stranice: A, B, C i D. Neka poslednje tri imaju samo vezu sa A. Tada je Page Rank stranice A:

$$PR(A) = PR(B) + PR(C) + PR(D) = 0.75$$

Ukoliko B ima link na D, D ima link na sve tri stranice, onda Page Rank stranice A iznosi:

$$PR(A) = \frac{PR(B)}{2} + \frac{PR(C)}{2} + \frac{PR(D)}{2}$$

Drugim rečima, Page Rank savetovan od neke stranice jednak je količniku početne Page Rank vrednosti i broju stranica na koje ima link. Pretpostavlja se da stranica može imati samo jedan link na neku drugu stranicu. Uopšteno, izraz koji određuje Page Rank stranice A po prethodnim kritrijumima je:

$$PR(A) = \frac{PR(B)}{L(B)} + \frac{PR(C)}{L(C)} + \frac{PR(D)}{L(D)}$$

gde je $L()$ broj linkova koji sadrži određena stranica.

U opštem slučaju Page Rank vrednosti za bilo koju stranu iz skupa B_υ je:

$$PR(u) = \sum_{v \in B_\upsilon} \frac{PR(v)}{L(v)}$$

Page Rank teorija smatra da ce čak i imaginarni surfer koji slučajno bira stranice u jednom trenutku prestati da ih posećuje. Verovatnoća, u svakom koraku, da će ta osoba da nastavi je faktor prigušenja d. Testirane su različite vrednosti za faktor prigušenja i ispostavilo se da se u praksi uglavnom koristi vrednost $d = 0.85$. Uz pomoć ovog faktora koji se u svakom trenutku smatra poznatim i univerzalnim Page Rank stranice A_i iz skupa koji ima n stranica ima oblik:

$$PR(A) = \frac{1-d}{n} + d \sum_{j \le L(A)} \frac{PR(A_j)}{A_j}$$

gde je A_j stranica koja je povezana sa stranicom A_i. Tako je Page Rank vrednost stranice izveden u funkciji od vrednosti drugih stranica. Ovaj način računanja Page Rank vrednosti odgovara zahtevu da je zbir svih Page Rank vrednosti skupa koji posmatramo jednak 1, jer je Page Rank vrednost stranice verovatnoća dolaska na tu stranicu.

Google svaki put kada pretražuje Web izračunava i obanavlja Page Rank indekse stranica. Kako povećava broj dokumenata u svojoj zbirci početne približne vrednosti Page Rank smanjuje za sve stranice. Formula za izračunavanje koristi model slučajnih pretraživaca koji posle nekoliko linkova prelaze na slučajan izbor stranica. Page Rank vrednosti stranice održava verovatnoću da ce slučajni pretraživač posetiti stranicu ako klikne na određeni link. To se može shvatiti kao Markovljev lanac u kojem se navode stranice i svi prelazi sa stranice na stranicu su jednako verovatni i svi su linkovi stranica.

Ako stranica nema linkova na druge stranice, ona prekida proces pretraživanja. Međutim, rešenje je prilično jednostavno. Ako surfer stigne na takvu stranicu on preuzima drugi URL slučajno i nastavlja. Prilikom izračunavanja Page Rank vrednosti za ovakve stranice one dobijaju linkove na sve stranice iz skupa, pa se njihov Page Rank raspodeljuje ravnomerno.

Matrica povezanosti bilo koje 2 stranice posmatranog skupa je simetrična matrica čiji članovi imaju vrednost 1 ukoliko su te stranice povezane, a 0 ukoliko nisu. Page Rank vrednosti skupa stranica kardinalnosti n čine vrednosti dominantnog sopstvenog vektora koji odgovara normiranoj matrici povezanosti. Normirana matrica povezanosti je matrica povezanosti čiji se članovi modifikuju tako da zbir po svim kolonama bude 1. Ova matrica se naziva još i transponovana Markovljeva matrica. Dominanatni sopstveni vektor je sopstveni vektor koji odgovara najvećoj sopstvenoj vrednosti. Označimo sa $\vec{x}$ taj sopstveni vektor.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} PR(p_1) \\ PR(p_2) \\ \vdots \\ PR(p_n) \end{bmatrix}$$

Na osnovu definicije sopstvene vrednosti i vektora imamo $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$. Kada ovu jednakost primenimo na normiranu matricu povezanosti i vektor $\vec{x}$ dobijamo matričnu jednačinu čiji je odnos među promenljivim:

$$\begin{bmatrix} l(p_1,p_1) & \cdots & l(p_1,p_n) \\ l(p_2,p_1) & \cdots & l(p_2,p_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l(p_n,p_1) & \cdots & l(p_n,p_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PR(p_1) \\ PR(p_2) \\ \vdots \\ PR(p_n) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} PR(p_1) \\ PR(p_2) \\ \vdots \\ PR(p_n) \end{bmatrix}$$

ili:

$$l(p_1,p_1)\ PR(p_1) + l(p_1,p_2)\ PR(p_2) + \ldots + l(p_1,p_n)\ PR(p_n) = \lambda\ PR(p_1)$$
$$l(p_2,p_1)\ PR(p_1) + l(p_2,p_2)\ PR(p_2) + \ldots + l(\mathrm{p}2,p_n)\ PR(p_n) = \lambda\ PR(p_2)$$
$$\ldots$$
$$l(p_n,p_1)\ PR(p_1) + l(p_n,p_2)\ PR(p_2) + \ldots + l(p_n,p_n)\ PR(p_n) = \lambda\ PR(p_n).$$

Vektor x, tj. vrednosti $PR(p_1)$, $PR(p_2)$, …, $PR(p_n)$ smatramo poznate i tražimo potreban uslov, tj. restrikciju za sopstvenu vrednost λ za koju je dati vektor sopstveni vektor normirane matrice povezanosti. Ove jednačine možemo sabrati:

$$\sum_{i=1}^{n} l(p_1,p_i)PR(p_1)+\ldots+\sum_{i=1}^{n} l(p_n,p_i)PR(p_n) = \lambda\big(PR(p_1)+\ldots+PR(p_n)\big)$$

Pošto je suma članova u istoj koloni normirane matrice jednaka 1 onda:

$$PR(p_1)+\ldots+PR(p_n) = \lambda\big(PR(p_1)+\ldots+PR(p_n)\big) \Rightarrow \lambda = 1$$

Da bismo dokazali postojanje ovog sopstvenog vektora koji sačinjavaju Page Rank vrednosti, potrebno je dokazati da za svaku normiranu matricu povezanosti postoji sopstvena vrednost λ tako da je $\lambda = 1$ i da je ta vrednost dominantna, tj. najveća. Problem ćemo rastaviti na sledeće teoreme:

Teorema 6. Sopstvena vrednost normirane matrice povezanosti ne može biti veća od 1.

Dokaz: Grešgorinovi diskovi imaju centar u dijagonalnim članovima normirane matrice povezanosti, a to je u nuli, jer nema stranice u posmatranom skupu koja ima link na sebe samu. Poluprečnik Grešgorinovog diska je zbir svih elemenata u jednoj koloni izuzimajući element koji pripada glavnoj dijagonali matrice. U ovom slučaju je taj zbir jednak 1 jer posmatramo normiranu matricu. Pošto su svi elementi matrice pozitivni, sopstvene vrednosti matrice povezanosti su realni brojevi, pa maksimalnu možemo tražiti među tačkama preseka sa koordinatnim osama. Tako sopstvena vrednost može biti najviše 1.

Teorema 7. Svaka normirana matrica povezanosti ima sopstvenu vrednost jednaku 1.

Dokaz: Neka je A data matrica, a x vektor čiji su svi članovi jednaki 1. Primetimo da je:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dalje sledi da je sopstvena vrednost matrice A^T jednaka 1 jer $\lambda = 1$ zadovoljava jednakost $A^T\vec{x} = \vec{x}$. Znamo da su sopstvene vrednosti matrice jednake sopstvenim vrednostima njene transponovane matrice, što znači da je $\lambda = 1$ sopstvena vrednost matrice A, čime je tvrđenje dokazano.

Ovim smo dokazali da se Page Rank vrednosti mogu izračunati izračunavanjem sopstvenog vektora normirane matrice povezanosti (tj. transponovane Markovljeve matrice) koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda = 1$. Ovaj način računanja je praktičan jer se korigovanjem povezanosti neke od stranica menjaju samo njena vrsta i kolona u matrici, što zahteva manje vremena nego računanje Page Rank vrednosti na „klasičan“ način.

Literatura

Anđelić T. P. 1970. *Matrice*. Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije

Milovanović G. V., Đorđević R. Ž. 2004. *Linearna algebra*. Niš: Elektronski fakultet

Martinović D. S., Đoković D. Ž. 1975. *Polinomi i matrice*. Beograd: Izdavačko-informativni centar za studente

Radunović D. 2004. *Numeričke metode*. Beograd: Akademska misao

Erna Oklapi and Sanela Numanović

Numerical Methods for Determining Eigenvalues and Eigenvectors

In this paper numerical methods for determining eigenvalues and eigenvectors are presented. Methods for localization, the determination of dominant eigenvalue and the determination of all eigenvalues of symmetric matrix are represented. The use of eigenvalue in other sciences were counted. Determining Page Rank values is one of the most important uses and its was described in detail.