*Jovana Perović i Jelena Krmar*

# Geometrija masa

*U ovom radu definisani su osnovni pojmovi vezani za geometriju masa (materijalnu tačku i težište) i dokazane teoreme koje se odnose na njih. Korišćenjem metode geometrije masa pokazano je kako se na drugačiji, elegantniji način može naći težište bilo kog mnogougla i odnos u kom je neka duž podeljena. Ovom metodom dokazane su Čevina, Menelajeva, Van Obelova, Simpsonova i Njutnova teorema. Definisan je baricentrični koordinatni sistem, prikazano kako se u njemu određuju tačke, kao i veza sa Dekartovim koordinatnim sistemom.*

## 1. Uvod

> Geometrija masa proizilazi iz tih shvatanja da se tačke u prostoru ne razmatraju kao tačke same po sebi, već im se pripisuju proizvoljno izabrani pozitivni ili negativni brojevi u svojstvu njihovih masa, tako da se tačke pojavljuju sa dodeljenim tačno određenim koeficijentima.
>
> *G. Jung: Geometrija masa*

Geometrija masa je oblast matematike nastala kombinacijom mehanike i geometrije. Bavi se svojstvima centra mase (težišta). Ideja o uvođenju masa pri rešavanju geometrijskih problema potiče još od Arhimeda (III v. p. n. e.). Koristeći to, on je dokazao da se medijane trougla seku u jednoj tački. Geometrija masa najviše se razvila kada je Avgust Ferdinand Mebijus 1827. godine postavio prve definicije i osmislio baricentrični koordinatni sistem (više od dve hiljade godina posle Arhimeda).

Saznanja iz oblasti geometrije masa, kao i baricentrični koordinatni sistem, našla su veliku primenu u matematici. Ova oblast je usko povezana sa momentom inercije, pa je našla široku primenu u mehanici. Baricentrični koordinatni sistem sve više nalazi grafičku primenu. Za prikazivanje odnosa sastojaka trokomponentnih sistema koristi se trougaoni dijagram koji je našao primenu u hemiji, metalurgiji, optici, populacionoj genetici (De Finetijev dijagram), statistici, geometriji i dr.

U ovom radu definisani su osnovni pojmovi i teoreme vezani za centar mase. Izložena je ideja kako se lako može odrediti težište bilo kog mnogougla i odnos u kom je duž podeljena. Metodom geometrije masa dokazane su neke poznatije teoreme koje se odnose na kolinernost tačaka i konkurentnost pravih. Defininisan je baricentrični koordinatni sistem i u njemu su određene koordinate nekih značajnih tačaka trougla.

## 2. Osnovni pojmovi i teoreme

Osnovni pojam u geometriji masa je materijalna tačka.

**Definicija 1**. Materijalna tačka (m. t.) je uređeni par $(m,P)$ gde je $m$ realan broj, a $P$ tačka. Kažemo još da tačka $P$ ima masu $m$.

Ako tačke $P_1,\ldots,P_n$ imaju mase $m_1,\ldots,m_n$, postoji sistem m. t. koji se obično označava sa:

$$\{(m_1,P_1),\ldots,(m_n,P_n)\}.$$

**Definicija 2**. Centar masa (težište) sistema

$$\{(m_1,P_1),\ldots,(m_n,P_n)\}$$

je tačka $T$ koja zadovoljava:

$$m_1\,\vec{TP_1}+\ldots+m_n\,\vec{TP_n}=\vec{0}$$

**Teorema 1**. Za svaki sistem m. t. postoji jedinstveno težište.

Dokaz: Pretpostavimo da za sistem

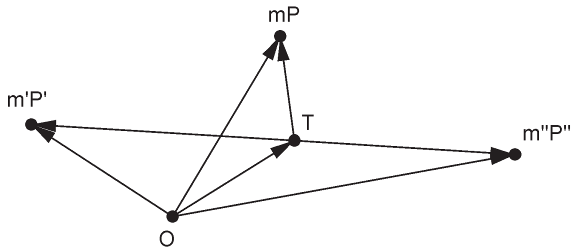
$$S=\{(m_1,P_1),\ldots,(m_n,P_n)\},$$

*Jovana Perović (1992), Kraljevo, Čibukovačka 18, učenica 1. razreda Gimnazije u Kraljevu*

*Jelena Krmar (1990), Ruma, Veljka Dugoševića 175, učenica 3. razreda Gimnazije „Stevan Puzić“ u Rumi*

*MENTORI:*
*Andreja Ilić, student 3. godine računarstva i informatike PMF-a u Nišu, Borivoja Gojkovića 6, Niš*

*Zlatko Emeđi, student 4. godine automatike i upravljanja FTN-a u Novom Sadu, Sremska 35, Bačinci (Šid)*




Slika 1

čija je masa različita od nule, postoji težište $T$ (slika 1). Izaberimo još i proizvoljnu tačku $O$. Na osnovu definicije za težište važi jednakost:

$$m_1 \vec{TP_1} + \ldots + m_n \vec{TP_n} = \vec{0}$$

odnosno, na osnovu zakona o sabiranju vektora:

$$m_1(\vec{OP_1} - \vec{OT}) + m_2(\vec{OP_2} - \vec{OT}) + \ldots + m_n(\vec{OP_n} - \vec{OT}) = \vec{0}$$

$$m_1 \vec{OP_1} + m_2 \vec{OP_2} + \ldots + m_n \vec{OP_n} - \vec{OT}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = \vec{0}$$

$$\vec{OT} = \frac{m_1 \vec{OP_1} + m_2 \vec{OP_2} + \ldots + m_n \vec{OP_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Desna strana izraza određuje jedinstven vektor koji za svaki sistem tačaka uvek postoji. Primetimo još da zbir $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ mora biti različit od nule.

**Teorema 2**. Ako u sistemu od $n$ materijalnih tačaka, $k$ ($k \leq n$) tačaka zamenimo njihovim težištem u koje skoncentrišemo svu njihovu masu, dobijeni sistem će imati isto težište kao i polazni.

Dokaz: Neka je:

$T_n$ težište sistema $S_n = \{(m_1, P_1), \ldots, (m_n, P_n)\}$

$T_k$ težište sistema $S_k = \{(m_1 P_1), \ldots, (m_k P_k)\}$

$T$ težište sistema gde je $S = \{(mT_k), (m_{k+1} T_{k+1}) \ldots, (m_n T_n)\}$, gde je $m = m_1 + \ldots + m_k$

Tada će za tačku $T_n$ u odnosu na proizvoljnu tačku $O$, na osnovu teoreme 1, važiti:

$$\vec{OT}_n = \frac{m_1 \vec{OP_1} + \ldots + m_n \vec{OP_n}}{m_1 + \ldots + m_n}$$

za tačku $T_k$:

$$\vec{OT}_k = \frac{m_1 \vec{OP_1} + \ldots + m_k \vec{OP_k}}{m_1 + \ldots + m_k}$$

i za tačku $T$:

$$\vec{OT} = \frac{m_k \vec{OT_k} + m_{k+1} \vec{OP_{k+1}} + m_2 \vec{OP_2} + \ldots + m_n \vec{OP_n}}{m_k + m_{k+1} + \ldots + m_n}$$

Iz druge jednakosti vidimo da je:

$$m_1 \vec{OP_1} + \ldots + m_k \vec{OP_k} = (m_1 + \ldots + m_k) \vec{OT_k}$$

Kada se to zameni u trećoj jednakosti dobije se jednakost ekvivalentna prvoj, tj. $\vec{OT} = \vec{OT_n}$, odnosno, $T = T_n$.

**Teorema 3**. Za sistem od dve m. t. $(m_1, A)$ i $(m_2, B)$ važi da se njihovo težište $T$ nalazi na pravoj $AB$, pri čemu je $\vec{TA} : \vec{BT} = m_2 : m_1$.

Dokaz: Na osnovu definicije težišta važi:

$$m_1 \vec{TA} + m_2 \vec{TB} = \vec{0}$$

$$m_1 \vec{TA} = m_2 \vec{BT}$$

$$\vec{TA} : \vec{BT} = m_2 : m_1$$

Iz poslednje jednakosti sledi da su vektori $\vec{TA}$ i $\vec{BT}$ linearno zavisni, pa su tačke $A$, $B$ i $T$ kolinearne.

Posledica. Ako su mase $m_1$ i $m_2$ obe pozitivni ili obe negativni brojevi, onda se težište nalazi na duži $AB$. Ako je jedna masa pozitivan, a druga negativan broj, težište se nalazi van duži $AB$.

**Teorema 4**. Ako se sistem od $n$ materjalnih tačaka $S = \{(m_1, P_1), \ldots, (m_n, P_n)\}$ nalazi u jednoj ravni, onda se i centar mase $T$ tog sistema nalazi u istoj ravni.

Dokaz: Za težište važi:

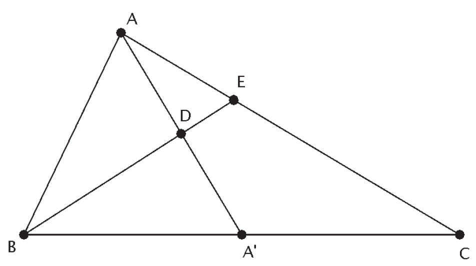
$$\vec{OT} = \frac{m_1 \vec{OP_1} + m_2 \vec{OP_2} + \ldots + m_n \vec{OP_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Vektor $\vec{OT}$ je linearno zavisan od vektora $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \ldots, \vec{OP_n}$. Pošto svi oni leže u istoj ravni, onda je i vektor $\vec{OT}$ u istoj ravni.

## 3. Određivanje težišta

Ideja za rešavanje sledećih problema je da tačke koje dele duži u nekom odnosu budu njihova težišta. To postižemo dodeljivanjem masa krajevima duži. Mase moraju biti obrnuto proporcionalne odgovarajućim delovima te duži. Na ovaj način može se vrlo jednostavno odrediti odnos u kom je neka duž podeljena i težište bilo kog mnogougla.

**Primer 1**. Kroz sredinu težišne duži $AA'$ i teme $B$ trougla $ABC$ povučena je prava. U kom odnosu ona deli stranicu $AC$?




Slika 2

Postavimo mase 2, 1, 1 redom u temena $A$, $B$ i $C$ (slika 2). Tada je $A'$ težište sistema $\{(1,B),(1,C)\}$. Težište sistema $\{(2,A),(2,A')\}$ je tačka $D$, koja je istovremeno i težište trougla. Pošto $E \in BD$ sledi da je tačka $E$ težište sistema $\{(2,A),(1,C)\}$. Na osnovu teoreme 3 važi da je $AE : EC = m_C : m_A = 1 : 2$

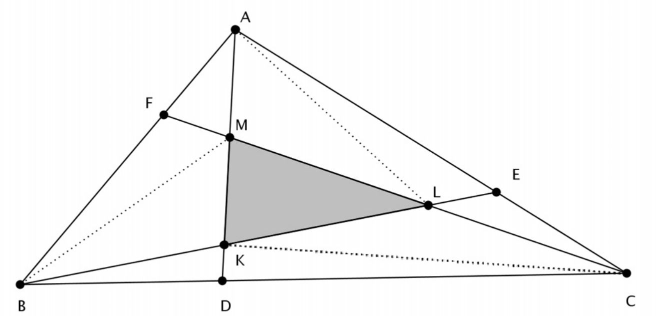
**Primer 2**. Neka su tačke $D$, $E$ i $F$ redom na stranicama trougla $ABC$ tako da važi $BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2$. Tačke $K$, $L$ i $M$ su redom preseci duži $BE$ i $AD$, $BE$ i $CF$, $AD$ i $CF$. Dokazati da važi:

$BL : LE = CM : MF = AK : KD = 6 : 1.$

$BK : KE = CL : LF = AM : MD = 3 : 4.$

$BK : KL : LE = CL : LM : MF = AM : MK : KD = 3 : 3 : 1.$

i da je površina trougla *KLM* sedam puta manja od površine trougla *ABC*.




Slika 3

Postavimo mase 1, 4 i 2 redom u temena *A*, *B* i *C*. Tada su tačke *D* i *E* redom centri masa sistema $\{(4,B),(2,C)\}$ i $\{(1,A),(2,C)\}$ sa masama (redom) 6 i 3 (slika 3). Iz toga sledi da je *K* centar mase sistema $\{(1,A),(4,B),(2,C)\}$ i da deli duži *BE* i *AD* redom u odnosima 3 : 4 i 6 : 1. Na sličan način se dokazuju i ostali odnosi ako za težište uzmemo tačku *L* ili *M*. Pošto važi: $BK : KE = 3 : 4$ i $BL : LE = 6 : 1$, sledi da je $BK : KL : LE = 3 : 3 : 1$.

Neka je *P* površina trougla *KLM*. Iz jednakosti duži *AM* i *MK* sledi da su površine trouglova *KLM* i *ALM* jednake (imaju jednake osnovice i zajedničku visinu). Kako su i duži *ML* i *LC* jednake, to su i površine trouglova *KLM*, *ALM* i *ALC* jednake. Na sličan način se pokazuje da su i površine trouglova *CLK*, *CKB*, *BKM* i *BMA* jednake površini trougla *KLM*. Dakle, trougao *ABC* se sastoji iz sedam manjih trouglova površina *P*, tj. površina trougla *KLM* je sedam puta manja od površine trougla *ABC*.

# 4. Dokazi nekih poznatijih teorema preko centra masa

Teoreme koje slede mogu se dokazati i na drugačiji način (npr. preko sličnosti ili vektora). Ovde su dokazane korišćenjem geometirije masa da bi bila pokazana ravnopravnost ove sa drugim metodama.

**Teorema 5** (Van Obelova teorema). Neka su tačke *A*, *B* i *C* temena trougla, $AA_1$, $BB_1$ i $CC_1$ duži tako da tačke $A_1$, $B_1$ i $C_1$ redom pripadaju stranicama *BC*, *CA* i *AB*, i sve se seku u jednoj tački *M*. Ako važi $AC_1 : C_1B = p$ i $AB_1 : B_1C = q$, onda je i $AM : MA_1 = (p + q) : 1$.

Dokaz: Dodelimo mase 1, *p* i *q* redom tačkama *A*, *B* i *C*. Tada su $B_1$ i $C_1$ redom centri masa sistema $\{(1,A),(q,C)\}$ i $\{(1,A),(p,B)\}$, jer važi:

$AC_1 : C_1B = p : 1,$

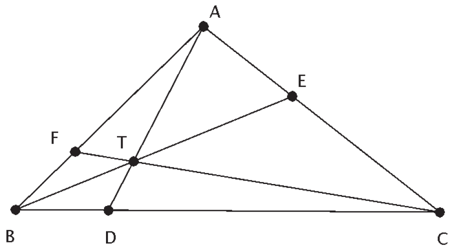
$AB_1 : B_1C = q : 1$

*M* je centar mase sistema $\{(1,A),(p,B),(q,C)\}$ i iz toga sledi da je $AM : MA_1 = (p + q) : 1$.

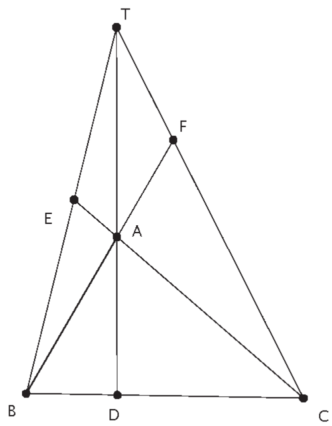
Italijanskog inženjera hidraulike Đovanija Čevu zanimalo je sledeće pitanje: Zamislimo da su na stranama *BC*, *CA* i *AB* trougla *ABC* izabrane redom tačke *D*, *E* i *F*. Može li se bez ikakvih docrtavanja i merenja unutar trougla, već samo na osnovu merenja na njegovoj konturi, zaključiti da li se prave *AD*, *BE* i *CF* seku u jednoj tački? U teoremi koju je dokazao 1678. godine, koristeći svojstva centra masa, Čeva je dao odgovor na ovo pitanje.

**Teorema 6** (Čevina teorema). Neka su tačke $D$, $E$ i $F$ redom izabrane na stranicama $BC$, $CA$ i $AB$ trougla $ABC$ ili na njihovim produžecima (slike 4 i 5). Prave $AD$, $BE$ i $CF$ su konkurentne ako i samo ako važi uslov (Čevin uslov):

$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = 1$$



Slika 4



Slika 5

Dokaz: Pretpostavimo najpre da su prave $AD$, $BE$ i $CF$ konkurentne. Neka važe odnosi: $\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC} = p : 1$ i $\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA} = q : 1$. Postavimo redom mase $pq$, 1 i $p$ u temena $A$, $B$ i $C$. Tada su tačke $D$ i $E$ redom težišta sistema $\{(1, B), (p, C)\}$ i $\{(p,C),(pq,A)\}$. U preseku pravih $BE$ i $AD$ nalazi se težište $T$ sistema $\{(pq,A),(1,B),(p,C)\}$. Kako prava $CF$ sadrži težište $T$, to je tačka $F$ težište sistema $\{(pq,A),(1,B)\}$. Iz toga sledi da je $\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB} = 1 : pq$.

Dakle, $(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = \frac{p}{1} \cdot \frac{q}{1} \cdot \frac{1}{pq} = 1.$

Posmatrajmo sada u suprotnom smeru, ako važi $(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CA} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = 1$, treba pokazati da su prave $AD$, $BE$ i $CE$ konkurentne. Pretpostavimo suprotno, da se ne seku u jednoj tački. Tada postoji tačka $F'$ na pravoj $AB$ takva da je tačka $T$ na pravoj $CF'$. Na osnovu prvog smera važi:

$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CA} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF'} : \overrightarrow{F'B}) = 1$$

Na osnovu pretpostavke važi:

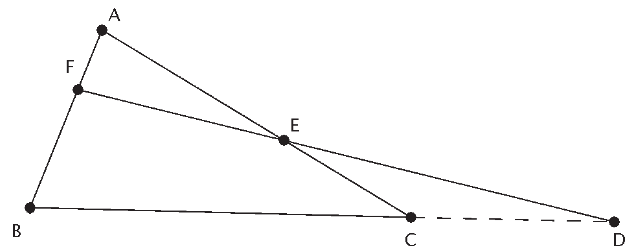
$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = 1$$

Iz poslednjih jednakosti sledi da je $\overrightarrow{AF'} : \overrightarrow{F'B} = \overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}$. Pošto su tačke $A$, $F'$, $F$ i $B$ kolinearne, to se tačke $F$ i $F'$ poklapaju, a to je kontradikcija. Postoji slučaj kada je uslov zadovoljen, a prave su paralelne (kada je zbir masa jednak nuli). Međutim, taj slučaj nećemo razmatrati zato što ne može da se dokaže preko osobina centra masa.

Starogrčki matematičar Menelaj je dokazao teoremu vrlo sličnu prethodnoj, a koja govori o kolinearnosti tačaka na pravama kojima pripadaju stranice trougla.

**Teorema 7** (Menelajeva teorema). Neka su u trouglu $ABC$ tačke $D$, $E$ i $F$ izabrane redom na stranicama (ili na njihovim produžecima) $BC$, $CA$ i $AB$. Tačke su kolinearne ako i samo ako važi jednakost: $(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = -1$

Dokaz: Pretpostavimo da su tačke $D$, $E$ i $F$ kolinearne. Razlikujemo dva slučaja: kada prava određena tačkama $D$, $E$ i $F$ seče dve stranice i produžetak treće (slika 6) i kada ta prava seče sva tri produžetka stranica (slika 7).



Slika 6

1. slučaj: Neka je $F$ centar mase sistema $\{(m_A, A), (m_B, B)\}$ i $C$ centar mase sistema $\{(m_D, D), (m_B, B)\}$ (slika 6). Tada se u preseku pravih $AC$ i $DF$ nalazi težište sistema $\{(m_A, A), (m_B, B), (m_D, D)\}$ i važe jednakosti:

(1) $m_B \overrightarrow{CB} + m_D \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

(2) $m_A \overrightarrow{FA} + m_B \overrightarrow{FB} = \vec{0}$

(3) $m_A \overrightarrow{EA} + (m_B + m_D) \overrightarrow{EC} = \vec{0}$

Iz jednakosti (1) sledi:

$$\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{CD} = \frac{m_D}{m_B}$$

$$\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} : \overrightarrow{CD} = \frac{m_D}{m_B} + 1$$

$$\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC} = -\frac{m_B + m_D}{m_b}$$

Na sličan način se i iz druge dve jednakosti može pokazati da važi:

$$\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB} = \frac{m_B}{m_A}$$

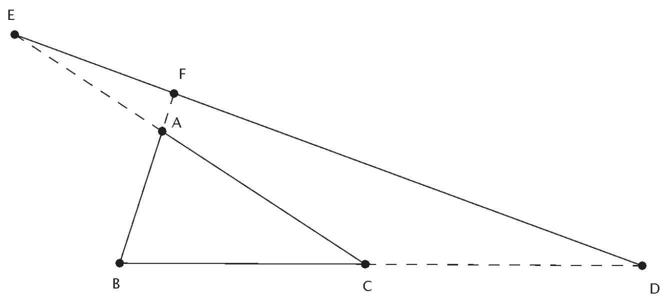
$$\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA} = \frac{m_A}{m_B + m_D}$$

Kad poslednje tri jednakosti pomnožimo, dobijamo:

$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = -\frac{m_B + m_D}{m_B} \cdot \frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A}{m_B + m_D} = -1$$

2. slučaj: Neka je $C$ centar mase sistema $\{(m_D, D), (m_B, B)\}$ i $F$ centar mase sistema $\{(m_E, E), (m_D, D)\}$ (slika 7). Tada je $A$ centar mase sistema $\{(m_e, E), (m_D, D), (m_B, B)\}$. Analogno prvom slučaju, dobija se:

$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = -\frac{m_B + m_D}{m_B} \cdot \frac{m_B}{m_A} \cdot \frac{m_A}{m_B + m_D} = -1$$




Slika 7

Posmatrajmo u drugom smeru: polazeći od poslednje jednakosti, treba da dokažemo da su tačke $D$, $E$ i $F$ kolinearne. Pretpostavimo da važi suprotno, tj. da $D$, $E$ i $F$ nisu kolinearne. Tada postoji tačka $F'$ na pravoj $AB$ takva da su $D$, $E$ i $F'$ kolinearne. Na osnovu prvog smera važi:

$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF'} : \overrightarrow{F'B}) = -1$$

a na osnovu pretpostavke:

$$(\overrightarrow{BD} : \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{CE} : \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}) = -1$$

Iz toga sledi:

$$\overrightarrow{AF'} : \overrightarrow{F'B} = \overrightarrow{AF} : \overrightarrow{FB}$$

Pošto su $A$, $B$, $F$ i $F'$ kolinearne, to je $F \equiv F'$. Kontradikcija.

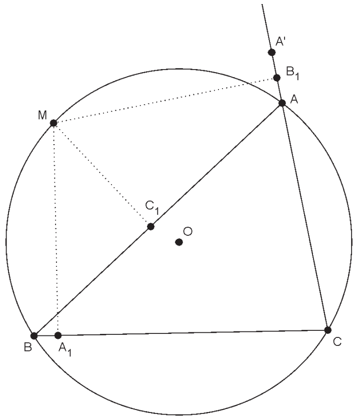
**Teorema 8** (Simpsonova teorema). Iz proizvoljne tačke $M$ koja se nalazi na kružnici povučene su normale na sve tri prave određene stranicama trougla $ABC$ koji je upisan u tu kružnicu. Dokazati da se podnožja normala (tačke $A_1$, $B_1$ i $C_1$) nalaze na istoj pravoj (slika 8).

Dokaz: Ako bismo pokazali da važi:

$$(\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C}) \cdot (\overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A}) \cdot (\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B}) = -1$$

dokazali bismo i da važi kolinearnost.

Uvedimo oznake $\angle MBA = \alpha$, $\angle MBC = \beta$ i $\angle MCB = \gamma$. $\angle MBA = \angle MCA = \alpha$ i $\angle MCB = \angle MAB = \gamma$ (periferijski uglovi nad istim lukom). Postavićemo masu $\cot\gamma$ u tačku $B$ i masu $\cot\beta$ u tačku $C$. Tada je $A_1$ centar mase tog sistema i tada je $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = \cot\beta : \cot\gamma$. Postavimo masu $\cot\alpha$ u tačku $A$. Pošto je masa u tački $B$ jednaka $\cot\gamma$, to je $C_1$ centar mase sistema $\{(\cot\alpha, A), (\cot\gamma, B)\}$ i važi odnos: $\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B} = \cot\gamma : \cot\alpha$. Neka je tačka $A'$ centralno simetrična tački $A$ u odnosu na tačku $B_1$ i postavimo masu $\cot\alpha$ u $A'$. Tada je $B_1$ centar mase sistema $\{(\cot\alpha, A'), (\cot\beta, C)\}$ i važi odnos: $\overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A'} =$




Slika 8

$= \cot\alpha : \cot\beta$. Pošto je $B_1$ središte duži $AA'$ to je $\overrightarrow{B_1A'} = -\overrightarrow{B_1A}$, onda je $\overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A} = -\cot\alpha : \cot\beta$.

$$(\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C}) \cdot (\overrightarrow{CB_1} : \overrightarrow{B_1A}) \cdot (\overrightarrow{AC_1} : \overrightarrow{C_1B}) = \frac{\cot\beta}{\cot\gamma} \cdot \frac{-\cot\alpha}{\cot\beta} \cdot \frac{\cot\gamma}{\cot\alpha} = -1$$

Iz poslednje jednakosti, na osnovu Menelajeve teoreme, važi kolinearnost tačaka $A_1$, $B_1$ i $C_1$.

# 5. Baricentrični koordinatni sistem

To što je trima tačkama ravni moguće dodeliti takve težine da bi se zadata četvrta tačka pokazala njihovim centrom, … dovelo me je do nove metode zadavanja tačke u ravni.

*Avgust Ferdinand Mebijus*

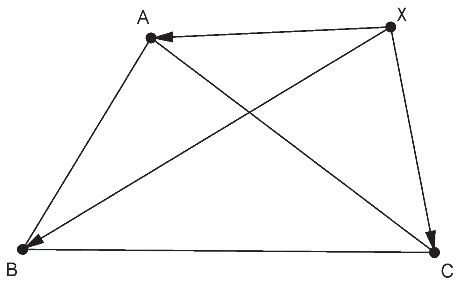
Baricentrični koordinatni sistem je takav sistem u kome se položaj tačke u ravni određuje u odnosu na trougao (referentni trougao). Koordinate te tačke su određene masama koje treba staviti u temena referentnog trougla da bi ta tačka bila težište trougla. Naziv potiče od grčke reči bario, što znači težak, prema tome, baricentar označava centar težine.

**Definicija 3**. Baricentrične koordinate tačke $X$ su uređene trojke realnih brojeva $(m_1, m_2, m_3)$ za koje važi da je $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$, a koje odgovaraju masama postavljenim redom u temena referentnog trougla $ABC$ tako da je tačka $X$ njegovo težište.

Baricentrične koordinate mogu biti normalizovane i nenormalizovane. Nenormalizovane ili homogene koordinate mogu biti bilo koja tri realna broja čija je suma različita od nule. Ako uzmemo $X$ kao težište trougla $ABC$, onda važi: $m_1\,\overrightarrow{XA} + m_2\,\overrightarrow{XB} + m_3\,\overrightarrow{XC} = km_1\,\overrightarrow{XA} + km_2\,\overrightarrow{XB} + km_3\,\overrightarrow{XC}$ $(k \neq 0)$. To znači da su koordinate tačke $X$ i $(m_1, m_2, m_3)$ i $(km_1, km_2, km_3)$ odnosno, da tačka $X$ nema jedinstvene koordinate. Da bi tačke bile jednoznačno određene, vrši se normalizovanje koordinata. Ako spojimo tačku $X$ sa temenima referentnog trougla, dobićemo tri trougla od kojih je svaki određen tom tačkom i sa dva temena trougla. Ovim možemo dobiti normalizovane koordinate na dva načina:

1. Odnos površina svakog od tih trouglova sa površinom referentnog trougla predstavlja jednu koordinatu tačke $X$. Ove koordinate se nazivaju površinske. Njihova suma je jednaka 1;
2. Za koordinate uzimamo prave vrednosti površina trouglova određenih tačkom $X$ i temenima trougla.

**Teorema 9**. Za svaku tačku u ravni referentnog trougla $ABC$ mogu se odrediti baricentrične koordinate $(m_1, m_2, m_3)$ u odnosu na taj trougao. Ako važi da je $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, onda su te koordinate jedinstveno određene.




Slika 9

Dokaz: Ako je $X$ težište trougla $ABC$, onda je $m_1\,\vec{XA} + m_2\,\vec{XB} + m_3\,\vec{XC} = \vec{0}$ (sllika 9). Iz toga sledi:

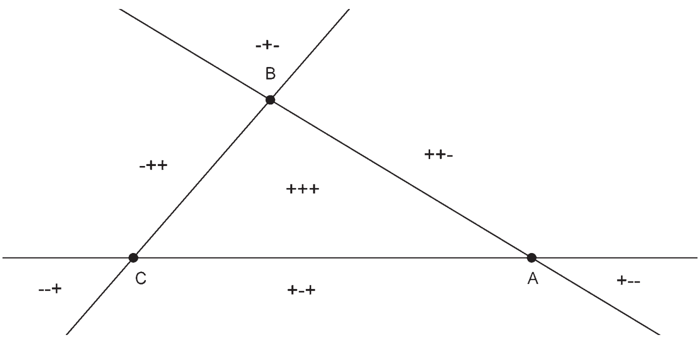
$$m_1\,\vec{XA} + m_2(\vec{XA} + \vec{AB}) + m_3(\vec{XA} + \vec{AC}) = \vec{0}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\vec{XA} = m_2\,\vec{BA} + m_3\,\vec{CA}$$

$$\vec{XA} = \frac{m_2\,\vec{BA} + m_3\,\vec{CA}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Pošto desna strana poslednje jednakosti uvek postoji, a njom je određen vektor $\vec{XA}$, to i taj vektor uvek postoji (tačka $X$ uvek postoji). Kada je $m_1 + m_2 + m_3 = 1$, onda je $\vec{XA} = m_2\,\vec{BA} + m_3\,\vec{CA}$. Mase $m_2$ i $m_3$ su jedinstveno određene. Samim tim i tačka $m_1 = 1 - m_2 - m_3$ je jedinstveno određena.

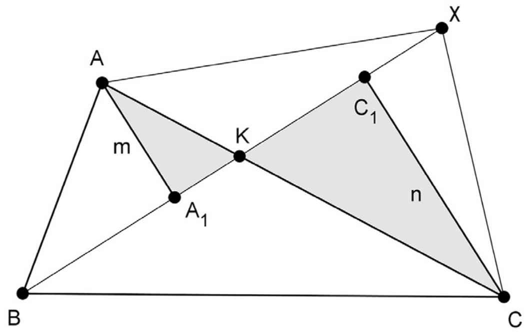
Baricentrične koordinate su realni brojevi, što znači da mogu biti pozitivne i negativne u zavisnosti od položaja tačke $X$ u odnosu na prave određene temenima referentnog trougla. Znak koordinate je jedan ako tačka i trougao leže sa iste, a drugi ako leže sa suprotnih strana prave $BC$ (slika 10).



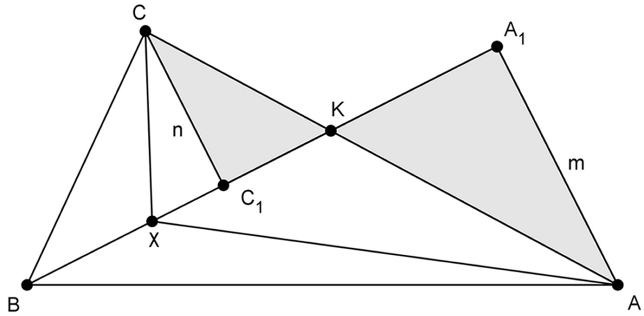

Slika 10

**Teorema 10**. U ravni referentnog trougla leži tačka $X$. Površinu trougla $ABC$ označićemo sa S, trougla $XBC$ sa $S_1$, trougla $XCA$ sa $S_2$ i trougla XAB sa $S_3$. Ako u temena trougla $ABC$ postavimo redom mase brojno ili proporcionalno jednake površinama $S_1$, $S_2$ i $S_3$, centar mase će biti tačka $X$.

Dokaz: Svakako da će bar jedna od pravih $XA$, $XB$ i $XC$ seći neku od stranica referentnog trougla. Neka je to prava $XB$ i neka seče stranicu $AC$ u tački $K$ (slike 11 i 12). Podnožja normala iz temena $A$ i $C$ na pravu $BX$ su redom $A_1$ i $C_1$ ($AA_1 = m, CC_1 = n$). Trouglovi $AA_1K$ i $CC_1K$ su slični. Iz toga sledi:



Slika 11



Slika 12

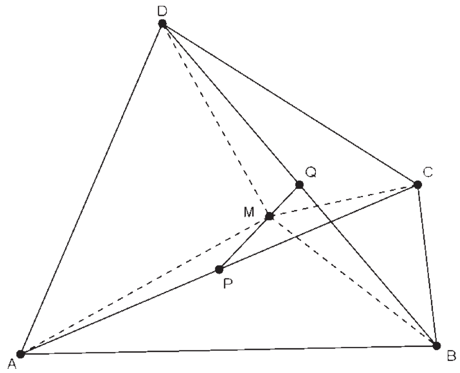
$AK : CK = AA_1 : CC_1 = m : n$. Postavimo masu $\frac{BXn}{2}$ u tačku $A$ i masu $\frac{BXm}{2}$ u tačku $C$. Tada je $K$ centar mase sistema $\left\{\left(\frac{BXn}{2}, A\right), \left(\frac{BXm}{2}, C\right)\right\}$ sa masom $\frac{BX(m+n)}{2}$. Ako postavimo masu $\frac{KX(m+n)}{2}$ u tačku B, važiće $\overrightarrow{XB} : \overrightarrow{KX} = \frac{BX(m+n)}{2} : \frac{KX(m+n)}{2}$ pa će $X$ biti centar mase sistema $\left\{\left(\frac{BXn}{2}, A\right), \left(\frac{KX(m+n)}{2}, B\right), \left(\frac{BXm}{2}, C\right)\right\}$ sa masom koja je jednaka površini trougla. Znaci baricentričnih koordinata zavise od položaja tačke $X$.

Na osnovu teoreme 10 dokazano je sledeće:

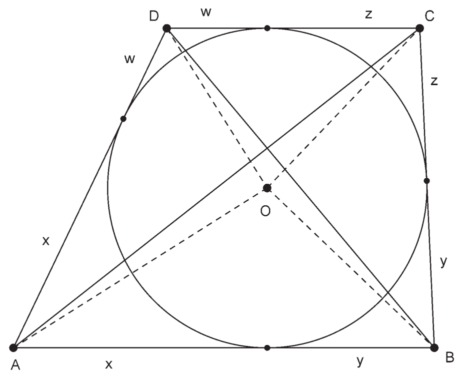
**Teorema 11** (Njutnova teorema). Ako su $P$ i $Q$ središta dijagonala $AC$ i $BD$ tangentnog četvorougla $ABCD$, $O$ središte kruga upisanog u taj četvorougao, dokazati da tačke $P$, $Q$ i $O$ pripadaju jednoj pravoj.

Dokaz: Neka je $M$ tačka na pravoj $PQ$; $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_x$ redom površine trouglova $ABM$, $BCM$, $CDM$, $ADM$, $ACM$ (slika 13). Baricentrične koordinate tačke $M$ u odnosu na trougao $ABC$ su $(-P_2, P_x, -P_1)$, a u odnosu na trougao $ACD$ su $(P_3, P_4, P_x)$. Tada je tačka $M$ centar mase sistema $\{(A, P_3 - P_2), (B, P_x), (C, P_4 - P_1), (D, P_x)\}$. Tačka $Q$ je težište sistema $\{(B, P_x), (D, P_x)\}$, jer je središte duži $BD$, a tačke $B$ i $D$ su opterećene jednakim masama. Kako $M$ pripada duži $PQ$, to je $P$ težište sistema $\{(A, P_3 - P_2), (C, P_4 - P_1)\}$. Iz jednakosti $AP = PC$ sledi jednakost $P_3 - P_2 = P_4 - P_1$.

Ako tačka $M$ ne pripada duži $PQ$, centar mase sistema $\{(A, P_3 - P_2), (C, P_4 - P_1)\}$ nije tačka $P$, odnosno, nije središte duži $AC$, pa ne važi jednakost $P_3 - P_2 = P_4 - P_1$. Sada je dovoljno dokazati da za centar upisanog kruga važi $P_3 - P_2 = P_4 - P_1$.




Slika 13




Slika 14

Analogno tački $M$ postavimo mase u temena četvorougla takve da je $O$ njihovo težište. Tačka $A$ je opterećena masom:

$$P_3 - P_2 = \frac{(w+z)R}{2} - \frac{(z+y)R}{2} = \frac{(w-y)R}{2}$$

Tačka $C$ opterećena je masom:

$$P_4 - P_1 = \frac{(x+w)R}{2} - \frac{(x+y)R}{2} = \frac{(w-y)R}{2}$$

gde su $x$, $y$, $z$ i $w$ tangentne duži (slika 14). Kako je $P_3 - P_2 = P_4 - P_1$, to tačka $O$ pripada duži $PQ$.

Postoji vrlo jednostavna veza između Dekartovog i Mebijusovog koordinatnog sistema. Ako imamo koordinate tačke u Dekartovom sistemu, možemo odrediti baricentrične koordinate te tačke u odnosu na bilo koji izabrani trougao i obrnuto. Kada kažemo Dekartov koordinatni sistem mislimo na njegov sistem u ravni. Baricentrične koordinate moraju biti normalizovane, tj. $m_1 + m_2 + m_3 = 1$.

**Primer 3**. Neka je data tačka $M$ sa baricentričnim koordinatama (0.2, 0.3, 0.5). Treba odrediti njene koordinate u Dekartovom koordinatnom sistemu.

Neka su koordinate referentnog trougla u Dekratovom sistemu $A(2, 1)$, $B(2, 5)$, $C(5, 1)$.

$[x, y] = 0.2[2, 1] + 0.3[2, 5] + 0.5[5, 1]$

$[x, y] = [0.4, 0.2] + [0.6, 1.5] + [2.5, 0.5]$

$[x, y] = [3.5, 2.2]$

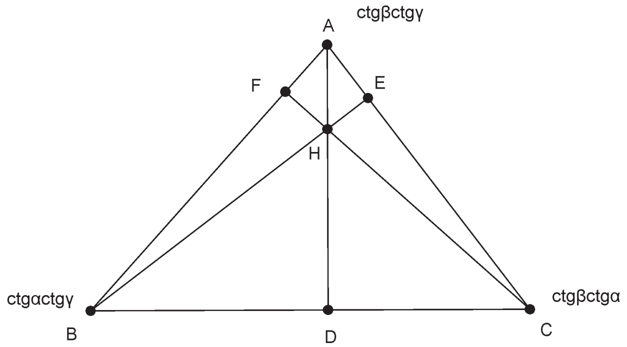
$M(3.5, 2.2)$

**Primer 4**. Koristićemo podatke iz prethodnog primera, samo u suprotnom smeru. Zadata je tačka $M(3.5, 2.2)$ i temena trougla $A(2, 1)$, $B(2, 5)$ i $C(5, 1)$. Treba izraziti baricentrične koordinate tačke $M$ u odnosu na trougao $ABC$.

$2m_1 + 2m_2 + 5m_3 = 3.5$
$1m_1 + 5m_2 + 1m_3 = 2.2$
$m_1 + m_2 + m_3 = 1$
Rešavanjem sistema dobija se: $m_1 = 0.2$, $m_2 = 0.3$, $m_3 = 0.5$, što znači da su baricentrične koordinate tačke $M(0.2, 0.3, 0.5)$ (pogledati primer 3).

## 5.1. Baricentrične koordinate nekih značajnih tačaka trougla

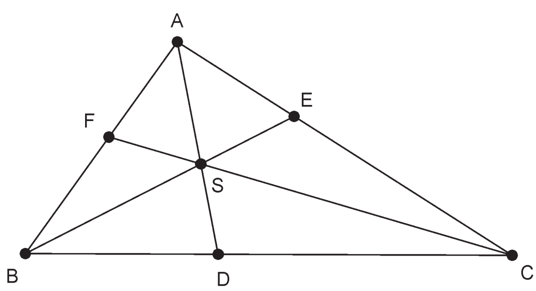
**1. Ortocentar** ($H$) – tačka u preseku visina trougla




Slika 15

Konstruišemo visine $AD$, $BE$ i $CF$. Tačka $H$ je ortocentar. Postavimo najpre masu $\cot\gamma$ u teme $B$ i masu $\cot\beta$ u teme $C$. Tada je $D$ njihovo težište. Da bi tačka $E$ bila centar mase za tačke $A$ i $C$, odnos masa kojima su opterećene treba da bude $\cot\gamma : \cot\alpha$. Zato ćemo u teme $A$ postaviti masu $\cot\beta\cot\gamma$, a masu u temenu $C$ pomnožićemo sa $\cot\alpha$. Da bi $D$ ostalo težište tačaka $B$ i $C$, masu u temenu $B$ pomnožićemo sa $\cot\alpha$. Tada je $F$ centar mase za tačke $A$ i $B$, a $H$ težište celog sistema. To znači da su baricentrične koordinate tačke $H(\cot\beta\cot\gamma, \cot\gamma\cot\alpha, \cot\alpha\cot\beta)$.

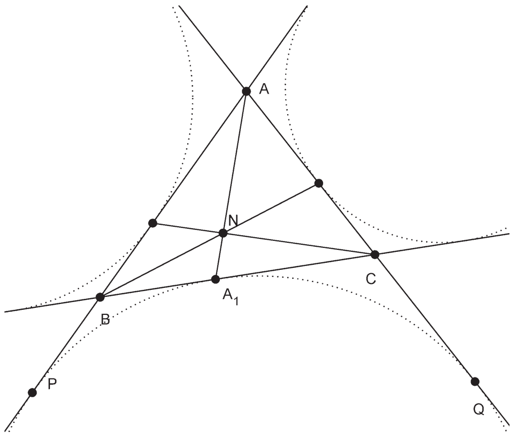
**2. Centar upisane kružnice** ($S$) – tačka u preseku simetrala unutrašnjih uglova trougla




Slika 16

Neka je u trouglu $ABC$ $BC = a$, $CA = b$ i $AB = c$. Simetrala unutrašnjeg ugla kod temena $A$ seče stranicu $a$ u tački $D$. Tada važi odnos $BD : DC = c : b$, analogno tome, $CE : EA = a : c$ i $AF : FB = b : a$. Da bi tačka $S$ bila težište, postavićemo redom u temena $A$, $B$ i $C$ mase $a$, $b$ i $c$. Dakle, baricentrične koordinate tačke $S$ su $(a, b, c)$.

**3. Najdželova tačka** ($N$) – tačka u preseku duži koje spajaju temena trougla sa dodirnim tačkama pripisanih kružnica naspramnih stranica




Slika 17

Neka u trouglu $ABC$ jedna od pripisanih kružnica dodiruje stranicu $BC$ u tački $A_1$, pravu $AB$ u tački $P$ i pravu $AC$ u tački $Q$ i neka je $BC = a$, $CA = b$ i $AB = c$.

Pošto je $BA_1 = BP$ i $CA_1 = CQ$ (tangentne duži), to je $AP + AQ = AB + BA_1 + A_1C + CA = 2s$ (obim trougla). Kako su i $AP$ i $AQ$ tangentne duži, onda je $AP = AB + BA_1 = AQ = AC + CA = s$ (poluobim). Tačka $A_1$ deli stranicu $BC$ u odnosu $(s - c) : (s - b)$ pa ćemo u tačke $B$ i $C$ redom postaviti mase $s - b$ i $s - c$. Na sličan način može se pokazati da tačku $A$ treba opteretiti masom $s - a$ da bi $N$ bilo težište. Znači, baricentrične koordinate Najdželove tačke su $(s - a, s - b, s - c)$.

# 6. Zaključak

Metodom geometrije masa može se jednostavno naći težište bilo kog mnogougla, odnos u kom je neka duž podeljena i dokazati Čevina, Menelajeva, Van Obelova, Njutnova i Simpsonova teorema. Određivanjem baricentričnih koordinata nekih značajnih tačaka trougla olakšava se pronalaženje karakterističnih veza između njih.

**Zahvalnost**. Zahvaljujemo se Andreji Iliću i Zlatku Emeđiju na pomoći.

## Literatura

Balk M. B., Boltyanskij B. G. 1987. *Geometriya mass*. Moskva: Nauka

Milosavljević N. 2008. Geometrija masa. Maturski rad. Gimnazija „Svetozar Marković“ Niš

Prasolov V. Problems in Plane and Solid Geometry, v.1 Plane Geometry. Dostupno (5. 11. 2008) na: http://www.toodoc.com/prasolov-pdf.html

*Jovana Perović and Jelena Krmar*

## Mass Geometry

In this paper the basic concepts of mass point geometry (mass point and center of mass) are defined. Some theorems related to them are proved. Using this method it is shown how to find the center of mass of any polygon, and the rate in which the segment is divided. Ceva's, Menelaus', Van Obel's, Simpson's and Newton's theorems are proved in different ways. The barycenric coordinate system is defined. It is shown how to identify a point in it and its connection with the Descartes coordinate system.