Marija Stanojević

Određivanje konfiguracija kružnica koristeći prostor Minkovskog

U ovom radu se razmatraju osobine sistema četiri kružnice u zavisnosti od odnosa svake dve kružnice. Dokazana je Dekartova teorema koja pokazuje da ako su u sistemu četiri kružnice svake dve međusobno tangentne, onda važi Dekartova jednakost. Definisano je preslikavanje skupa kružnica u četvorodimenzionalni prostor Minkovskog i data je formula koja se odnosi na rešavanje sistema četiri kružnice. Ova formula korišćena je da bi se našao četvrti krug u sistemu u kome su poznata tri kruga i odnos četvrtog kruga sa svakim od tri data kruga. Ovaj metod koristi se u rešavanju matematičkih problema i određivanju nekog realnog sistema.

1. Uvod

Svaku kružnicu možemo definisati kao polinom drugog reda oblika

$$C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c \qquad (1)$$

Lema 1. Ako je a vodeći koeficijent jednačine

$C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c = 0$

dokazati da za $a = 0$ ovaj polinom predstavlja jednačinu prave.

Dokaz: Ako u jednačinu kružnice uvrstimo $a = 0$ dobijamo da je $C(x,y) = -2px - 2qy + c = 0$, odakle sledi da je $y = \frac{-px}{q} + \frac{c}{2q}$, ako koeficijent uz x predstavimo kao $k = \frac{-p}{q}$, a slobodni član kao $n = \frac{c}{2q}$, ovu jednačinu možemo napisati kao $y = kx + n$, što je linearna jednačina prave. Možemo primetiti da je jednačina prave zapravo specijalan slučaj jednačine kružnice. Pretpostavimo da postoji $a \neq 0$ za koje važi da je

$C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c = 0$

takođe jednačina prave, odatle sledi da je kvadratna jednačina ujedno jednačina prave, što nije moguće.

Kako ćemo razmatrati samo osobine kružnica pretpostavićemo da je $a \neq 0$. Odredimo koordinate kružnice koja je predstavljena polinomom oblika

$C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c$.

Ovaj polinom možemo transformisati tako da dobijemo karakterističnu jednačinu kružnice

$$\left(x - \frac{p}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{a}\right)^2 = \frac{-c}{a}$$

Odavde vidimo da se centar nalazi u tački $\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{a}\right)$, a poluprečnik je

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{a}\right)^2 + \left(x - \frac{p}{a}\right)^2}$$

Definicija 1. Ako je u jednačini kružnice oblika

$C(x,y) = a(x^2 + y^2) - 2px - 2qy + c = 0$

koeficijent $a = 1$, onda kažemo da je ta kružnica normalizovana.

Klasu kružnica oblika

$\Theta(x,y) = 0 \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot 0 \cdot x - 2 \cdot 0 \cdot y + c = 0$

nazivamo klasom nepostojećih kružnica jer se matematički mogu izvesti, a takve kružnice ne postoje u realnom svetu.

Definicija 2. Ugao između kružnica C_1 i C_2 koje se seku jednak je uglu između tangenta na krugove iz tačke preseka krugova.

Marija Stanojević (1991), Niš, Jelašnička 3b, učenik 3. razreda Gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu

2. Osobine kružnica

Definicija 3. Neka su

$$C_1(x_1,y_1) = a_1(x_1^2 + y_1^2) - 2p_1x_1 - 2q_1y_1 + c_1 = 0 \tag{2}$$

$$C_2(x_2,y_2) = a_2(x_2^2 + y_2^2) - 2p_2x_2 - 2q_2y_2 + c_2 = 0 \tag{3}$$

jednačine kružnica, onda se zbir kružnica $C_1 + C_2$ može predstaviti jednačinom

$$(C_1 + C_2)(x,y) = (a_1 + a_2)(x^2 + y^2) - 2(p_1 + p_2)x - 2(q_1 + q_2)y + (c_1 + c_2) = 0$$

Proizvod kružnice C_1 i skalara $k \in R$ definišemo jednačinom oblika

$$kC_1(x_1,y_1) = ka_1(x_1^2 + y_1^2) - 2kp_1x_1 - 2kq_1y_1 + kc_1 = 0$$

Definicija 4. Ako su (2) i (3) jednačine kružnica C_1 i C_2 onda je proizvod tih kružnica

$$C_1 * C_2 = p_1p_2 + q_1q_2 - \frac{c_1a_2 + c_2a_1}{2}$$

Lema 2. Ako su C_1, C_2 i C_3 kružnice i k realan broj, onda važi

1) $C_1 * (kC_2) = (kC_1) * C_2 = k(C_1 * C_2)$
2) $C_1 * (C_2 + C_3) = C_1 * C_2 + C_1 * C_3$

Dokaz: Tvrđenja 1) i 2) možemo lako dokazati ako svaku kružnicu predstavimo u obliku jednačine (1) i primenimo formulu za proizvod kružnica. Pregrupisavanjem koeficijenata sa svake strane jednakosti dobijamo da jednakost važi.

Lema 3. Ako su $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$ dve normalizovane jednačine, onda proizvod kružnica možemo predstaviti kao $C_1 * C_2 = d^2 - r_1^2 - r_2^2$ gde je d rastojanje između centara kružnica. Ovaj proizvod nazivamo Derbuov proizvod (*Darboux*).

Posledica 1. Za dve normalizovane kružnice koje se međusobno seku važi da je Derbuov proizvod $C_1 * C_2 = r_1r_2 \cos\alpha$.

Lema 4. Dve kružnice C_1 i C_2 su međusobno normalne ako i samo ako je njihov proizvod nula. Dokaz: Ako se ova dva kruga seku, onda za njih važi da je $C_1 * C_2 = r_1r_2 \cos\alpha$. Kako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, to je $\cos\alpha = 0$, pa samim tim i taj proizvod je nula. Ako je proizvod dva kruga 0, onda je $C_1 * C_2 = r_1r_2 \cos\alpha = 0$ i $r_1 \neq 0$ i $r_2 \neq 0$, odakle sledi da je $\cos\alpha = 0$, pa je $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Za $c \neq 0$ možemo napisati jedančinu kružnice oblika $\Theta(x,y) = 0 \cdot (x^2 + y^2) - 2 \cdot 0 \cdot x - 2 \cdot 0 \cdot y + {}$ $+c = 0$. Sve jednačine kružnica ovog oblika predstavljaju familiju nepostojećih kružnica.

3. Dekartova teorema

Teorema 1. Neka su C_1, C_2, C_3 i C_4 četiri kružnice u ravni takve da svaka dodiruje spolja ostale tri. Neka je R_i poluprečnik kružnice C_i, onda je

$$2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2}\right) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^2$$

Dokaz: Neka je $\alpha_i = \frac{1}{R_i}$, za $i = 1, 2, 3, 4$. Jednačinu svake kružnice možemo transformisati tako da je $\alpha_i = \frac{1}{R_i}$. Pretpostavimo da postoje realni brojevi x_1, x_2, x_3 i x_4 tako da je

$$x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 + x_4C_4 = \Theta \tag{4}$$

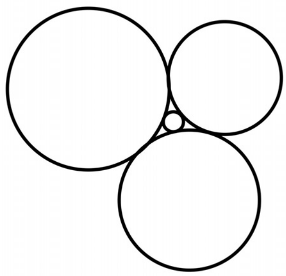
gde je Θ kružnica iz familije nepostojećih kružnica. Množenjem kružnica $C1$, $C2$, $C3$ i $C4$ sa Θ dobijamo sistem jednačina. Sa desne strane svake jednačine se nalazi član $\frac{\alpha_i R}{2}$, gde je R poluprečnik nepostojeće kružnice Θ. Kako smo jednaačine transformisali tako da je $\alpha_i = \frac{1}{R_i}$, onda zamenom α_i u $\frac{\alpha_i R}{2}$ dobijamo $\frac{R}{2R_i}$, zatim predstavimo $\frac{1}{R_i}$ kao α_ι. Kako je R bilo koji broj, poluprečnik kružnice iz skupa nepostojećih kružnica, uzećemo da je $R = -4$ i dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= \alpha_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= \alpha_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= \alpha_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= \alpha_4 \end{aligned} \tag{5}$$

Jednakost (4) važi ako je rešenje dobijenog sistema jedinstveno. Ako predstavimo ovaj sistem kao matricu, onda je sabiranjem i oduzimanjem vrsta možemo transformisati u matricu

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Kako je determinanta ove matrice različita od nule onda prema Kramerovom pravilu postoji jedinstveno rešenje ovog sistema (slika 1).



Slika 1.
Dekartov sistem četiri kružnice

Figure 1.
Descartes system of four circles

Ako množimo jednačinu (4) sa jednačinom kružnice Θ, sa desne strane dobićemo nulu kao proizvod dve Θ matrice, a odgovarajuća jednačina je

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0 \tag{6}$$

Ako u jednačini (6) zamenimo α_i odgovarajućom jednačinom iz sistema (5) dobijamo

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - 2\sum_{i=1,j=1}^{4} x_i x_j = 0 \tag{7}$$

Sabiranjem jednačina iz sistema (5) dobijamo da je $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, odatle sledi da je $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$. Zamenom α_i odgovarajućom jednačinom iz sistema (5) dobijamo formulu

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2 = 4\sum_{i=1,j=1}^{4} x_i^2 \tag{8}$$

Razlika $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$ i $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2 = 4\sum_{i=1,j=1}^{4} x_i^2$ daje jednačinu oblika

$$\sum_{i=1,j=1}^{4} \alpha_i \alpha_j = 4 \sum_{i=1,j=1}^{4} x_i x_j \tag{9}$$

Koristeći jednačine (8) i (9) jednačinu (7) možemo da transformišemo u sledeću

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)$

Zamenom α sa $\frac{1}{R_i}$ dobijamo Dekartovu jednačinu.

Jednačinu dobijenu Dekartovom teoremom možemo predstaviti kao proizvod matrica

$$b^T D b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = 0.$$

4. Prostor Minkovskog

Definicija 5. Prostor Minkovskog je četvorodimenzionalni pseudoeuklidski prostor $R_{1,3}$.

U četvorodimenzionalnom prostoru Minkovskog postoji jedna dimenzija koja određuje vreme, koju obeležavamo $x_0 = ct$, gde je c brzina svetlosti, a t vreme. Ostale tri dimenzije predstavljaju prostor i obeležavamo ih sa $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Definicija 6. Pseudoskalarni proizvod vektora x i y definišemo kao

$\langle x, y \rangle_{1,3} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$.

Iz definicije pseudoskalarnog proizvoda dva vektora sledi da je pseudoskalarni kvadrat vektora

$\|x\|_{1,3}^2 = \langle x, x \rangle_{1,3} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

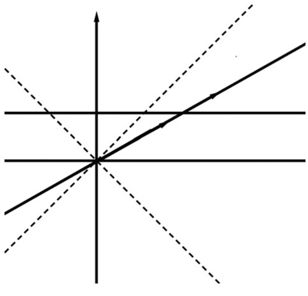
Definicija 7. Prostor Minkovskog možemo podeliti na tri disjunktna podskupa (slika 2):

1) $\{x \in R_{1,3}^4 : \|x\|_{1,3} > 0\}$ je skup vremenskih vektora

2) $\{x \in R_{1,3}^4 : \|x\|_{1,3} = 0\}$ je skup izotropnih (svetlosnih) vektora

2) $\{x \in R_{1,3}^4 : \|x\|_{1,3} < 0\}$ je skup prostornih vektora.

Izotropni vektori su oni vektori kod kojih važi $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.



Slika 2.
Prostor Minkovskog. Isprekidane linije označavaju izotropne vektore koji određuju svetlosni konus.

Figure 2.
Minkowski space. The dotted lines represent isotropic vectors that determine the light conus.

Definicija 8. Standardna izotropija četvorodimenzionalnog prostora Minkovskog podrazumeva linearni realni prostor $M \cong R^4$ sa skalarnim proizvodom $\langle , \rangle$ datim matricom

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Iz definicije 8 vidimo je za vektore $v = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ i $w = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ skalarni proizvod jednak $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} v_1 w_2 + \frac{1}{2} v_2 w_1 - v_3 w_3 - v_4 w_4$. Kvadrat vektora v je odatle $|v|^2 = v_1 v_2 - v_3^2 - v_4^2$.

Matricu (10) zovemo standardna izotropna baza.

Definicija 9. Pedo (*Pedoe*) projektivno preslikavanje je preslikavanje iz skupa Ω krugova u vektore u standardnom izotropskom Minkovski prostoru M (projektivni prostor PM) , $\pi \Omega \to \mathrm{PM}$

$$\pi(C) = L\ \{[\ 1\ \ x_0^2 + y_0^2 - r^2\ \ \ x_0\ \ \ y_0]^{\mathrm{T}}\}$$

gde je L lineal za vektorski prostor V.

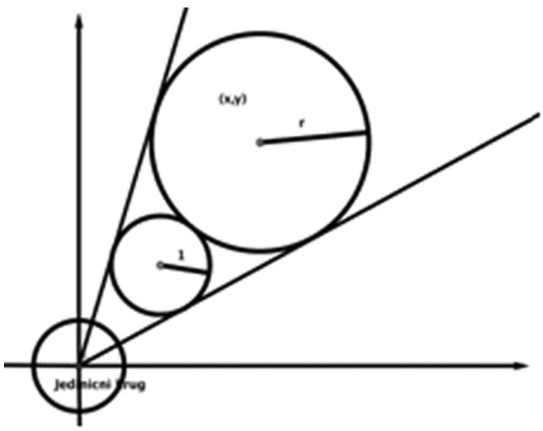
Ukoliko Pedo preslikavanjem slikamo pravu dobićemo skup vektora

$$\pi(S) = L\ \{[0\ \ \ \frac{c}{2}\ \ \ a\ \ \ b]^{\mathrm{T}}\}$$

Ako Pedo preslikavanje proširimo i na tačke one se slikaju u

$$\pi(P) = L\ \{[\ 1\ \ x^2 + y^2 - r^2\ \ \ x\ \ \ y\ ]^{\mathrm{T}}\}$$

što se nalazi u izotropnom delu prostora, gde je $|\pi(\nu)|^2 = 0$, $\forall \nu \in \pi(P)$. Zraci koji predstavljaju krugove leže u M van svetlosnog konusa.



Slika 3.
Zraci u prostoru Minkovskog koji predstavljaju kružnice

Figure 3.
Rays in Minkowski space that represent circles

Definicija 10. Pedo specijalno preslikavanje je specifikacija $\pi^*: \Omega \to M$ koji preslikava jedinični prostor kao vektor u M tako da $\pi^*(C) = \pi(C)$ i $|\pi^*(C)|^2 = -1$ (slika 3).

Da bismo izbegli dvosmislenost ove definicije uzećemo da je prva komponenta π^* uvek nenegativna. Vektor π^* zovemo Pedo vektor.

$$\pi^* = \begin{bmatrix} b \\ \bar{b} \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{x^2 + y^2 - r^2}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix}$$

gde su $b = \frac{1}{r}$, $\bar{b} = \frac{x^2 + y^2 - r^2}{r}$, $x^* = \frac{x}{r}$ i $y^* = \frac{y}{r}$.

Pokažimo sada da su matrice C i π^* slične, tj. da π^* predstavlja isti krug kao C.

$$C \to \begin{bmatrix} a \\ c \\ p \\ q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 + y^2 - r^2 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \\ \frac{x^2 + y^2 - r^2}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} \end{bmatrix} \sim \pi^*(C)$$

Teorema 2. Specijalno Pedo preslikavanje je injekcija u jedinični hiperboloid u M i odgovara pseudoeuklidskom skalarnom proizvodu koji je u relaciji sa Darbuovim proizvodom krugova

$$\langle \pi(C_1), \pi(C_2) \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 * C_2}{r_1 r_2}.$$

Nađimo ortonormalnu bazu koja je dijagonalna i odgovara izotropskoj bazi u kojoj smo da sada radili

$$g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim g_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Odavde sledi da je skalarni proizvod sada $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 - v_4 w_4$. Pedo vektor kruga sada je oblika

$$\pi^*(C) = \begin{bmatrix} \frac{1 + x_0^2 + y_0^2 - r^2}{2r} \\ \frac{1 - x_0^2 - y_0^2 + r^2}{2r} \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b^2 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{r} - 1}{2b} \\ \frac{b^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{r} + 1}{2b} \\ x^* \\ y^* \end{bmatrix}$$

5. Teorema o konfiguraciji krugova

Definicija 11. Gramova (*Gram*) matrica sa elementima f_{ij} je matrica skalarnih proizvoda svih vektora $v \in V$, gde je V vektorski prostor, tako da je $f_{i,j} = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Neka su C_1, C_2, C_3 i C_4 kružnice predstavljene Pedo jediničnim vektorima. Definišimo matricu $A = [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4]$ i nad njom uvedimo Gramovu matricu tako da je $f_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle$.

Teorema 3. Ako su krugovi C_1, C_2, C_3 i C_4 linearno nezavisni vektori, onda je

$$AFA^T = G \tag{11}$$

gde je G inverz $G = g^{-1}$ i F je inverz $F = f^{-1}$.

Dokaz: Matricu f možemo napisati na sledeći način $f = A^T g A$. Kako je A inverzibilna matrica zbog nezavisnosti ova četiri kruga, onda možemo napisati $f^{-1} = A^{-1} g^{-1} (A^T)^{-1}$. Pomnožimo sada obe strane jednakosti sa A i A^T.

Osnovni uslov ove teoreme je da su vektori kružnica linearno nezavisni, pa ovaj metod ne možemo primeniti na linearno zavisne vektore. U slučaju linearno zavisnih vektora determinanta matrice f bi bila jednaka nuli, pa ne bismo mogli da nađemo inverz F, što znači da ne bismo mogli da primenimo ovu metodu.

Ako je

$$g=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow G=g^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

Lema 5. Neka je u_i, $i = 1, 2, 3, 4$ jedan od četiri vektora b, $\overline{b}$, x^*, y^*, onda $u_i^T F u_j = G_{i,j}$.

Da bismo olakšali neka izračunavanja možemo da primenimo jednakosti

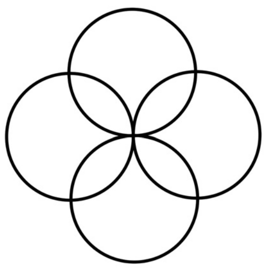
$$(x^*)^T F x^* = -1$$
$$(y^*)^T F y^* = -1$$
$$b^T F b = 0$$

Jednačina $b^T F b = 0$ je zapravo Dekartova formula, koja važi za nezavisne krugove.

6. Neki karakteristični preseci krugova

Lema 6. Ne postoji konfiguracija četiri međusobno normalna kruga (slika 4).

Dokaz: Matrica F je u ovom slučaju jedinična matrica, pa jednačinu (11) možemo pisati $AFA^T = AA^T = G$. Ovakva jednačina je nemoguća jer je leva strana jednačine pozitivna, a desna negativna.



Slika 4.
Neuspeli pokušaj crtanja četiri kružnica od kojih su svake dve međusobno normalne

Figure 4.
Failed attempt to draw four circles every two of which are mutually normal

Teorema 4. (Proširena Dekartova teorema) četiri kruga od kojih se svaka dva dodiruju unutra ili spolja (slika 5) zadovoljavaju jednačinu iz Dekartove teoreme

$$2\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_3^2}+\frac{1}{R_4^2}\right)=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)^2$$

Dokaz: Za svaka četiri kruga od kojih se svaka dva dodiruju spolja važi da je matrica f jednaka

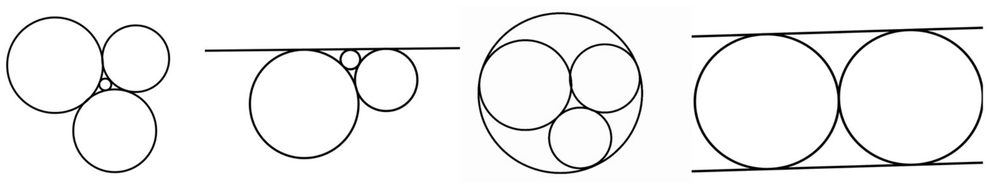
$$f=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow F=f^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}$$

(pogledati poglavlje tri, dokaz Dekartove teoreme).

Primenimo sada jednačinu (11) i dobićemo:

$$\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3&b_4\\\overline{b}_1&\overline{b}_2&\overline{b}_3&\overline{b}_4\\x_1^*&x_2^*&x_3^*&x_4^*\\y_1^*&y_2^*&y_3^*&y_4^*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1&\overline{b}_1&x_1^*&y_1^*\\b_2&\overline{b}_2&x_2^*&y_2^*\\b_3&\overline{b}_3&x_3^*&y_3^*\\b_4&\overline{b}_4&x_4^*&y_4^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&8&0&0\\8&0&0&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

gde su obe strane pomnožene sa četiri, pa je $4f^{-1} = D$, matrica Dekartove teoreme.



Slika 5. Moguća geometrijska rešenja proširene Dekartove teoreme

Figure 5. Possible geometric solutions of the extended Descartes theorem

Da bi uopštili ovu jednakost moramo pretransformisati matricu f, tako da ona predstavlja i mogućnost da se dva kruga dodiruju unutra. Dobijamo da je

$$f=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow F=f^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}=RDR$$

gde je R = diag(1, 1, 1, –1). Odatle sledi da je proširena Dekartova formula $b^T(RDR)b = 0$, ili $(Rb)^T(Rb) = = 0$. Zbog toga kružnice koje se dodiruju sa unutrašnje strane imaju pseudoskalarni proizvod –1.

7. Položaj četiri kružnice

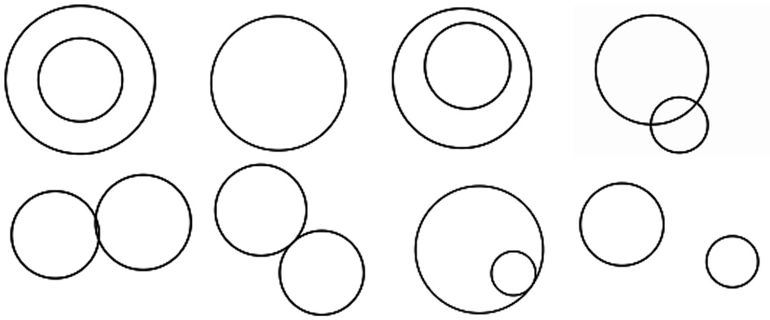
Koristeći formulu (11) možemo naći položaj kružnice C_4 ako znamo položaje kružnica C_1, C_2, i C_3 i ako znamo položaj četvrte kružnice u odnosu na ostale kružnice.

Svaki element matrice f izračunavamo na sledeći način

$$\varphi_{i,j}=\frac{d_{i,j}^2-r_i^2-r_j^2}{2r_ir_j}=\frac{1}{2}\left(d_{i,j}b_ib_j-\frac{b_i^2+b_j^2}{b_ib_j}\right) \qquad (12)$$

$d_{i,j}$ je rastojanje između centara krugova i i j, r_i označava poluprečnik i-tog kruga, a $b_i=\frac{1}{r_i}$ je krivina.

Iz ove formule možemo razlikovati nekoliko slučajeva odnosa kružnica C_i i C_j koji daju određene skalarne proizvode koje ćemo označavati sa $\varphi_{i,j}$ (slika 6).



Slika 6. Mogući odnosi dve kružnice

Figure 6. Possible relations between two circles

1) U slučaju da su kružnice koncentrične $\varphi_{i,4} = \frac{-r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$, tj. manji je od –1.

2) Ukoliko se ova dva kruga poklapaju, onda je $\varphi_{i,4} = -1$.

3) Ako se seku, $\varphi_{i,j}$ je jednak polovini kosinusa ugla pod kojim se seku.

4) Ako su C_i i C_4 međusobno normalne kružnice, onda je $\varphi_{i,4} = 0$.

5) Ukoliko se kružnice C_i i C_4 dodiruju $\varphi_{i,4} = 1$.

6) Ako nemaju zajedničkih tačaka $\varphi_{i,4}$ je veći od jedan.

Posle određivanja elemenata matrice f tražimo njen inverz F i primenjujemo jednačinu (11).

7.1. Apolonijev problem

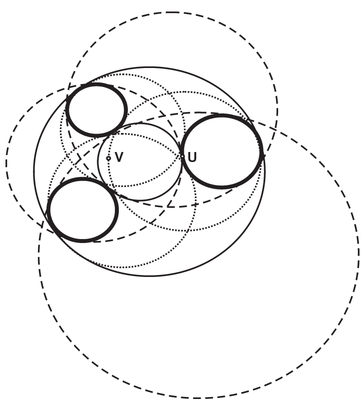
Apolonijev problem se sastoji u nalaženju kružnice C_4 koja dodiruje tri proizvoljno zadate kružnice C_1, C_2 i C_3. Dokažimo da ovakva kružnica postoji i da ovaj problem ima osam različitih rešenja. Matrica koja predstavlja Apolonijev problem je

$$\begin{bmatrix} -1 & * & * & \pm 1 \\ * & -1 & * & \pm 1 \\ * & * & -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & -1 \end{bmatrix}$$

To je simetrična matrica u kojoj su prva tri elementa zadnje kolone (prva tri elementa zadnje vrste) ±1 čime određujemo sve moguće slučajeve, a ukoliko se opredelimo za tačno određene znakove ispred prva tri elementa zadnje vrste (kolone) dobijamo jedno od osam mogućih rešenja jer imamo ukupno 2^3 mogućnosti (slika 7). Da bismo definisali elemente * matrice koristimo jednačinu iz teoreme 2. Iz jedančine (12) dobijamo da je konfiguracija matrice

$$f = \begin{bmatrix} -1 & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \pm 1 \\ \varphi_{12} & -1 & \varphi_{23} & \pm 1 \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & -1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & -1 \end{bmatrix}$$

U zavisnosti od odnosa kružnica C_1, C_2 i C_3 možemo izračunati vrednosti $\varphi_{i,j}$. Za konkretno date krugove C_1, C_2 i C_3 možemo izračunati vrednosti $\varphi_{i,j}$ i dodati ih u matricu f. Zatim računamo inverz matrice f i primenjujući jednakost (11) možemo naći G i rešenje Apolonijevog problema koji dobijamo iz F. Zapravo, na osnovu datih uslova i tri kruga C_1, C_2 i C_3 možemo naći mesto četvrte kružnice. Kako je $bFb^T = 0$, gde je $b^T = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4]$ i kako znamo vrednosti b_1, b_2, b_3 možemo naći vrednosti za b_4, čime bismo mogli da odredimo i poluprečnik četvrtog traženog kruga.



Slika 7.
Grafički prikaz svih osam rešenja Apolonijevog problema

Figure 7.
Graphic representation of all eight solutions of the Apollonius problem

8. Program za računanje poluprečnika i položaja centra četvrtog kruga

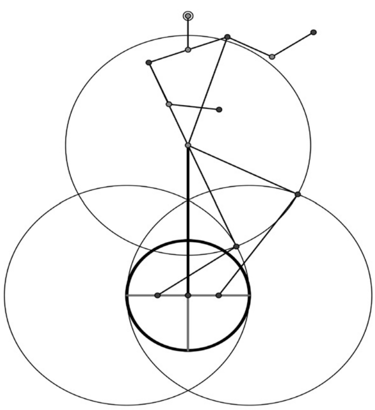
Ovaj metod određivanja osobina četvrte kružnice, ako su poznate ostale tri kružnice i odgovarajući odnosi, može se isprogramirati. Program koji je napravljen za ulazne podatke koristi poluprečnike tri kružnice i odgovarajuće odnose između kružnica i na osnovu njih određuje poluprečnik koristeći metod opisan u radu ukoliko je moguće odrediti sistem ovim metodom. Dobijeni ulazni podaci se koriste za računanje pseudoskalarnog proizvoda za svake dve kružnice i na osnovu toga se nalazi Gramova matrica f. Zatim se određuje determinanta tako dobijene matrice i ukoliko je moguće određuje se inverzna matrica Gramovoj matrici $F = f^{-1}$. Ukoliko je determinanta nula, onda nije ispunjen osnovni uslov metoda opisanog u radu, da su svaka dva vektora kružnica međusobno nezavisna, pa se ova metoda ne može upotrebiti za rešavanje tog sistema. Za inverznu matricu Gramovoj matrici važi tvrđenje teoreme 3: $AFA^T = G$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \bar{b}_4 \\ x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* \\ y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* \end{bmatrix} \text{ i } G = g^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Iz leme 5 važi $u_i^T F u_j = G_{i,j}$, tj. ako $u_i^T = b^T$ i $u_j = b$, onda će biti $b^T F b = G_{1,1}$ iz formule $AFA^T = G$, gde je $b^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$. Kako je $G_{1,1} = 0$ dobijamo jednačinu $b^T F b = 0$ koja se svodi na kvadratnu jednačinu po $b_4 = \dfrac{1}{R_4}$. Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo moguće poluprečnike. Ukoliko je diskriminanta ove kvadratne jednačine manja od nule sistem je nerešiv ovom metodom. U suprotnom, dobijamo dva rešenja. Ako je neko od njih manje ili jedanko nuli, program ga ne ispisuje kao moguće rešenje. Za date koordiante tri kružnice program može da nađe koordinate četvrte kružnice rešavajući jedančine koje dobija na osnovu odnosa svake dve kružnice i njihovih poluprečnika.

9. Model monocikla

Metodom koji je pokazan nalazimo potrebne osobine četvrte kružnice ako znamo poluprečnike ostale tri kružnice i odnose svake dve kružnice. Ovaj metod možemo primeniti na problem voženja monocikla. Nacrtajmo model čoveka koji vozi monocikl. Takav model sadrži četiri kružnice: tri koje su određene dužinom čovekovih nogu i četvrte koja je poluprečnik monocikla. Možemo da nađemo najbolji poluprečnik točka ako odredimo odnose ove četiri kružnice u određenom položaju čoveka. Uzmimo slučaj kad je ravan koju čine pedale horizontalan (slika 8).



Slika 8.
Horizontalni položaj pedala

Figure 8.
Horizontal position of pedals

Dobijene odnose krugova zamenimo u Gramovu matricu i potražimo inverz ove matrice. Koristimo jednačinu $b^T F b = 0$, gde je dvostruki elemenat $F_{i,j}$ koeficijent ispred proizovda $b_i b_j = \frac{1}{R_i R_j}$ i koeficijent ispred $b_j b_i = \frac{1}{R_j R_i}$ jer je matrica simetrična. Na ovaj način dobijamo kvadratnu jednačinu čijim rešavanjem nalazimo poluprečnik četvrte kružnice, u ovom slučaju točka. Ovaj problem možemo da rešimo i preko programa obrazloženog u prethodnom poglavlju koji nam daje rezultat $R_4 = 2.63$ za poluprečnik traženog točka.

10. Zaključak

U ovom radu su ispitivani odnosi kružnica u sistemu sa četiri kružnice u ravni pomoću osobina prostora Minkovskog. Pokazano je da se za svaki sistem četiri kružnice čiji su međusobni odnosi poznati može naći mesto ili poluprečnik četvrte kružnice ako su ostala tri poluprečnika poznata. Moguća primena ovakvih sistema su matematički problemi, kao što je dokazivanje teorema i rešavanje matematičkih problema kao što je problem Apolonijevih kružnica. Takođe, ova metoda može poslužiti pri proračunavanju osobina mehaničkih mašina koje za svoj rad koriste zupčanike ili u modelima i nacrtima koji koriste sisteme kružnica. U ovom radu određivan je najadekvatniji poluprečnik monocikla u odnosu na dužinu nogu čoveka koji vozi. Takođe, napisan je program koji primenjuje metod izložen u radu za bilo koje korektne podatke koji se unose i na osnovu njih određuje poluprečnik četvrtog kruga i koordinate centra tog kruga. Problem koji nije posmatran u radu je dokazivanje ovih teorema u višedimenzionalnim prostorima. Ovakav problem bi bio veoma interesantan za dalja istraživanja.

Literatura

Milovanović G., Đorđević R. 2004. *Linearna algebra*. Niš: Elektronski fakultet

Kočinac Lj. 1997. *Linearna algebra i analitička geometrija*. Niš: Prosveta

Kocik J. A theorem on circle, configuration. http://arxiv.org/pdf/0706.0372v1

Pedoe D. 1970. *Geometry: A Comprehensive Course*. New York: Dover Publications

Marija Stanojević

Determining Configurations of Circles Using Minkowski Space

The Descartes theorem and some properties of circles were found. The configuration of circles in a plane and in Minkowski space was described. The formula for the forth circle when we have three known circles and properties between every pair of circles is given, so some cases of circles configuration were solved.