Stefan Stanimirović i Mladen Pantić

Kombinatorni identiteti izvedeni Fibonačijevim i Katalanovim matricama

U ovom radu ispitivane su matrične reprezentacije Paskalovih, Fibonačijevih i Katalanovih brojeva. Takođe, iz matričnih reprezentacija i njihovih međusobnih odnosa, dokazani su neki kombinatorni identiteti Fibonačijevih i Katalanovih brojeva

1. Uvod

Paskalovi, Fibonačijevi i Katalanovi brojevi u velikoj meri se koriste u kombinatorici za dokazivanje raznih identiteta.

Za svako $n \in \mathbb{N}$ definišemo $n \times n$ Paskalovih brojeva $P_n = [p_{ij}]$, na sledeći način:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \tag{1}$$

Za elemente Paskalove matrice važi $p_{i,j} = p_{i-1,j-1} + p_{i-1,j}$. U radu Lija i saradnika (Lee *et al*. 2003) autori su dali formulu inverzne $n \times n$ Paskalove matrice $P_n^{-1} = [p'_{ij}]$:

$$p'_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}\binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \tag{2}$$

Fibonačijevi brojevi su izučavani u mnogim knjigama i radovima. Obeležimo sa F_n n-ti član Fibonačijevog niza, gde je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = 1$. Na sledeći način definisana je donje-trougaona matrica $n \times n$ Fibonačijevog niza $\Phi_n = [f_{ij}]$:

Stefan Stanimirović (1989), Niš, Bubanjskih heroja 9/17, učenik 3. razreda Gimnazije "Svetozar Marković" u Nišu

Mladen Pantić (1988), Valjevo, Belo Polje 108, učenik 4. razreda Valjevske gimnazije

$$F_{ij} = \begin{cases} F_{i-j+1}, & i-j+1 \geq 0 \\ 0, & i-j+1 < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Takđe, u istom radu (Lee *et al*. 2003), data je inverzna Fibonačijeva matrica $\Phi_n^{-1} = [f_{ij}']$, gde je:

$$f'_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -1, & i-2 \leq j \leq i-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases} \tag{4}$$

Katalanova matrica definisana je na isti način kao Fibonačijeva. Obeležimo sa C_n n-ti član Katalanovog niza, gde je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Tada je $n \times n$ donje-trougaona Katalanova matrica $K_n = [k_{ij}]$ zadata formulom:

$$k_{ij} = \begin{cases} C_{i-j+1}, & i-j \geq 0 \\ 0, & i-j < 0 \end{cases} \tag{5}$$

U ovom radu izučavane su Paskalove, Fibonačijeve i Katalanove matrice, a zatim su iz matrične reprezentacije Paskalovih, Fibonačijevih i Katalanovih brojeva izvedeni određeni kombinatorni identiteti.

2. Kombinatorni identiteti Fibonačijevih brojeva

Neka je zadata pomoćna matrica $L_n = [l_{ij}]$, čiji su elementi:

$$l_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-2}{j-1} - \binom{i-3}{j-1}, & i \geq 3 \\ 1, & i = j \leq 2 \\ 0, & \text{inace} \end{cases} \tag{6}$$

Na primer, za n = 6, matrica je sledećeg oblika:

$$L_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz definicije zaključujemo da je $l_{11} = 1$, $l_{1j} = 0$ za $j \geq 2$, $l_{21} = 0$, $l_{22} = 1$, $l_{2j} = 0$ za $j \geq 3$, $l_{i1} = -1$ za i ≥ 3. Za $j \geq 2$ važi $l_{ij} = l_{i-1,j-1} + l_{i-1,j}$. Na osnovu datih definicija izvodimo sledeću teoremu:

Teorema 1. Neka je L_n matrica od elemenata zadatih formulom (6). Neka je, dalje, zadata Paskalova matrica P_n formulom (1) i Fibonačijeva matrica Φ_n formulom (3). Tada važi $P_n = \Phi_n L_n$.

Dokaz: Kako je matrica Φ_n inverzibilna, dokazaćemo da je $\Phi_n^{-1} P_n = L_n$, gde je inverzna Fibonačijeva matrica zadata formulom (4). Razmatramo nekoliko slučajeva. Za prvu vrstu primećujemo da je $f'_{11} = 1$, $f'_{1j} = 0$ za $j \geq 2$, pa je $\Sigma_{k=1}^{n} f'_{1k} p_{k1} = f'_{11} p_{k1} = 1 = l_{11}$. Kako za $j \geq 2$ važi $p_{ij} = 0$ i $f'_{1j} = 0$, zaključijemo $\Sigma_{k=1}^{n} f'_{2k} p_{k2} = 1 = l_{22}$. Kako je $p_{1j} =$ $= p_{2j} = 0$ za $j \geq 3$, to sledi da je $\Sigma_{k=1} f'_{2k} p_{kj} = 0 = l_{2j}$, za $j \geq 3$. Množeći i-tu vrstu matrice Φ_n^{-1} sa prvom kolonom matrice P_n, dobije se $\Sigma_{k=1}^{n} f'_{ik} p_{k1} = -1 - 1 + 1 = -1 = l_{i1}$.

Na kraju izvedimo za $i \geq 3$ i $j \geq 2$. Zaključujemo da je $\Sigma_{k=1}^{n} f'_{ik} p_{kj}$ $= = \binom{i-1}{j-1} - \binom{i-2}{j-1} - \binom{i-3}{j-1}$, što je upravo jednako članu matrice L_n u i-toj vrsti i j-toj koloni.

Time je dokaz da je $\Phi_n^{-1} P_n = L_n$ završen.•

Ova teorema je važna za dokazivanje njenih mnogih posledica.

Teorema 2. Neka su n i r celi brojevi za koje važi $1 \leq r \leq n$. Tada je:

$$\binom{n-1}{r-1} = \sum_{k=r}^{n} F_{n-k+1} \frac{(k-3)!\left[r(k-1) - 2(r-1) - (k-r)^2\right]}{(r-1)!(k-r)!}. \qquad (7)$$

Dokaz: Kako je $P_n = \Phi_n L_n$ zaključujemo $p_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} f_{ik} l_{kj}$. Za $i = n$ i $j = r$, gde je $1 \leq r \leq n$ važi $p_{nr} = \binom{i-1}{r-1} = \Sigma_{k=1}^{n} f_{nk} l_{kr}$. Tačnije,

$$\binom{n-1}{r-1} = F_n l_{1r} + F_{n-1} l_{2r} + \ldots + F_3 l_{n-2,r} + F_2 l_{n-1,r} + F_1 l_{nr}.$$

Vidimo da je $f_{nk} = F_{n-k+1}$, kao i $l_{kr} = 0$ za $k < r$, dok je za $k \geq r$

$$l_{kr} = \frac{(k-3)!\left[r(k-1) - 2(r-1) - (k-r)^2\right]}{(r-1)!(k-r)!}.$$

Uvrštavajući poslednje činjenice u gornju formulu, dobijamo identitet (7).•

Posledica 1. Za $n \in \mathbb{N}$ važi $F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-2} = F_{n-1}$.

Dokaz: Uvrstimo u (7) da je $r = 1$. Lako je uočiti da važi $l_{11} = 1$, $l_{21} = 0$ i $l_{i1} = -1$ za $i = 3, 4, \ldots n$ (videti primer matrice L_n). Zato sledi da je $F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-2} = F_{n-1}$.

Posledica 2. Za $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$n = 1+F_{n-1}+F_{n-2}-\sum_{k=5}^{n} F_{n-k+1}\,(k-4).$$

Dokaz: Slično kao pre, zamenimo u (7) da je $r = 2$. Tada važi:

$$\binom{n-1}{1} = \sum_{k=1}^{n} f_{nk}\, l_{k2}.$$

Uočimo drugu kolonu matrice L_n, gde važi $f_{12} = 0, f_{22} = f_{23} = 1, f_{24} = 0$, dok je $f_{i2} = -(k-4)$, za i ≥ 5. Sada je lako uočiti da je:

$$n-1 = F_{n-1}+F_{n-2}-\sum_{k=5}^{n} F_{n-k+1}\,(k-4).$$

Dokazano je da je inverzna matrica $L_n^{-1} = [l'_{ij}]$ zadata formulom:

$$l'_{ij} = (-1)^i \sum_{k=j}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} F_{k-j+1} \tag{8}$$

Otuda sledi $l'_{ij} = l'_{i-1,j-1} - l'_{i-1,j}$. Važne činjenice , koje ćemo koristiti dalje u radu su $l'_{i1} = (-1)^{i+1} F_{i-2}$ za $i \geq 2$ i $l'_{i2} = (-1)^{i+1} F_{i-1}$ za svako i. Kako je matrica L_n inverzibilna, iz $P_n = \Phi_n L_n$, sledi $P_n L_n^{-1} = \Phi_n$, a odatle se izvode sledeće dve teoreme.

Teorema 3. Za svaki prirodan broj n važi:

$$F_n = 1 + \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} F_{k-2}$$

Dokaz: iz $P_n L_n^{-1} = \Phi_n$ zaključujemo $f_{ij} = \Sigma_{k-1}^{n} p_{ik}\, l'_{kj}$. Za $i = n$ i $j = 1$ zaži $i - j + 1 \geq 0$, pa sledi:

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk}\, l'_{k1}.$$

Kako važi $l'_{11} = 1, l'_{21} = 0, l'_{k1} = (-1)^{k-1} F_{k-2}$ za $k \geq 3$, zaključujemo

$$F_n = p_{n1} + \sum_{k=3}^{n} p_{nk}\,(-1)^{k+1} F_{k-2},$$

tačnije,

$$F_n = 1 + \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k-1} F_{k-2}. \bullet$$

Teorema 4. Za svaki prirodan broj n važi:

$$F_n = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} F_{k-1}.$$

Dokaz: Ranije smo ukazali na činjenicu da za svako i važi $l'_{i2} = (-1)^i F_{i-1}$, te je za $i=n+1$ $l'_{n+1,2} = (-1)^{n+1} F_n$. Međutim, iz formule (8) zaključujemo:

$$l'_{n+1,2} = (-1)^n \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} F_{k-1}.$$

Izjednačavanjem ovih dveju jednačina dobija se gore navedena formula.•

Sledeća teorema dokazuje se na vrlo specifičan način, drugačije od dosadašnjih teorema.

Teorema 5. Za svaki prirodan broj n važi:

$$F_n = 2^{n-2} - \sum_{k=1}^{n-3} F_k 2^{n-k-3}.$$

Dokaz: Neka je zadata matrica:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

formata $n \times 1$. U teoremi 1 dokazano je da važi $P_n = \Phi_n L_n$. Množenjem leve i desne strane matricom E_n dobija se $P_n E_n = \Phi_n L_n E_n$. Množenjem matrica L_n i E_n dobije se matrica formata $n \times 1$, čiji je elemenat u i-toj vrsti jednak $l_{i1} + l_{i2} + \ldots + l_{ii}$, što je u stvari jednako 2^{i-3}. Dakle,

$$Q'_n = L_n E_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 2^{n-3} \end{bmatrix}$$

a zatim

$$Q'_n = F_n Q_n = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_1 + F_2 \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ \vdots \\ F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \Sigma_{k=1}^{n-3} F_k 2^{n-k-2} \end{bmatrix}.$$

S druge strane imamo:

$$W_n = P_n E_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ \vdots \\ 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ukoliko izjednačimo elemente u n-toj vrsti i prvoj koloni matrica Q'_n i W_n dobija se:

$$2^{n-1} = 2F_n + \sum_{k=1}^{n-3} F_k 2^{n-k-3}$$

Deljenjem ove jednakosti sa 2, dobija se jednakost navedena u teoremi. •

Posledica 3. Suma prvih n članova Fibonačijevih brojeva zadata je formulom:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = \sum_{k=1}^{n+2} \binom{n+1}{j-1} F_{j-2} = 2^n - \sum_{k=1}^{n-1} F_k 2^{n-k-1} - 1$$

Dokaz: iz posledice 1 zaključujemo da je suma prvih n članova Fibonačijevog niza jednaka:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Sada primenom rezultata iz teoreme 3 na levu stranu jednakosti dobije se prva jednakost, dok se primenom rezultata iz teoreme 5 dobija druga jednakost.

Teorema 6. Za prirodan broj $n \geq 2$ važi:

$$(-1)^{n+1} F_{n-2} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n-1}{k-1} F_n$$

Dokaz: Kako je Paskalova matrica inverzibilna, iz $P_n L_n^{-1} = \Phi_n$, zaključujemo $L_{n-1} = P_n^{-1} \Phi_n$, to jest $l'_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} p'_{ik} f_{kj}$. Za $i = n$ i $j = 1$ važi $l'_{ij} = (-1)^{n+1} F_{n-2}$, $p'_{nk} = (-1)^{n+k} \binom{n-1}{k-1}$ i $f_{k1} = F_k$. Sada je lako uočiti da važi identitet. •

3. Katalanova matrica i njena inverzna matrica

U odeljku 1 definisana je donje-trougaona matrica (5). Za $n = 6$, Katalanova matrica ima oblik:

$$K_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 42 & 14 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 132 & 42 & 14 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Za dokaz sledeće teoreme koristićemo zanimljiv identitet:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i \, C_{n-i} \tag{9}$$

Teorema 7. Inverzna Katalanova matrica $K_n^{-1} = [k'_{ij}]$ zadata je formulom:

$$k'_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = 1 \\ -2\,, & i = j+1 \\ -C_{i-j-1}\,, & i \geq j+2 \\ 0\,, & inace \end{cases} \tag{10}$$

Dokaz: Dokaz se sastoji iz dva dela, jer je potrebno dokazati da je $K_n K_n^{-1} = K_n^{-1} K_n = I_n$.

Neka je matrica $Q_n = [q_{ij}]$ takva da je $Q_n = K_n K_n^{-1}$. Tada je:

$$qij = \sum_{k=1}^{n} k_{ik} k'_{ij} =$$

$$= \sum_{k=1}^{i} k_{ik} k'_{ij} \quad (\text{jer je } k_{ij} = 0 \text{ za } i > j \text{ i } k'_{ij} = 0 \text{ za } i < j)$$

$$= k_{ij} - 2\, k_{i,j+1} + \sum_{k=j+2}^{i} k_{ik} k'_{kj} \quad (\text{zamenom formule (10)}).$$

Za $i = j$ važi $q_{ij} = C_1 - 0 + 0 = 1$, dok je za $i \neq j$

$$Q_{ij} = C_{i-j+1} - 2\, C_{i-j} + \sum_{k=j+2}^{i} C_{i-k+1} (-C_{k-j-1})$$

$$= C_{i-j+1} - C_{i-j}\, C_0 - C_{i-j-1}\, C_1 - C_{i-j-2}\, C_2 - \ldots - C_2\, C_{i-j-2} - C_1\, C_{i-j-1} - C_0\, C_{i-j}$$

$$= C_{i-j+1} - \sum_{k=0}^{i-j} C_k\, C_{i-j-k}$$

$$= C_{i-j+1} - C_{i-j+1} = 0 \quad (\text{na osnovu (9)}).$$

Dakle, kako važi:

$$q_{ij} = w_{ij} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

za svako i, j takvo da je $1 \leq i, j \leq n$, sledi da je $Q_n = W_n = I_n$ •

Na primer, za $n = 6$, matrica K_n^{-1} ima oblik:

$$K_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -14 & -5 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Kombinatorni identiteti Katalanovih brojeva

Definišimo matricu $M_n = [m_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$ na sledeći način:

$$m_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} - 2\binom{i-2}{j-1} - \Sigma_{k=1}^{i-2} C_{i-k-1} \binom{k-1}{j-1}, & i \geq 2 \\ 1 , & i = j = 1 \\ 0 , & \text{inace} \end{cases} \tag{11}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -23 & -15 & -7 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Što se tiče same matrice, uočavamo da je $m_{11} = 1$, $m_{1j} = 0$ za $j \geq 2$. Iz definicije se vidi da za $i, j \geq 2$ važi $m_{ij} = m_{i-1,\, j-1} + m_{i-1,\, j}$.

Sledeća teorema je važna za izvođenje kombinatornih identiteta Katalanovih brojeva.

Teorema 8. Neka su zadate Paskalova matrica P_n (1), Katalanova matrica K_n (5) i pomoćna matrica M_n (11). Tada važi $P_n = K_n M_n$.

Dokaz: Matrica Kn je inverzibilna, pa dokazujemo da važi $K_n^{-1} P_n = M_n$. Uočimo da je $m_{11} = 1$, kao i $\Sigma_{k=1}^{n} k'_{1k} p_{k1} = 1 = m_{11}$. Za $j \geq 2$ važi $\Sigma_{k=1}^{n} k'_{1k} p_{kj} = k'_{11} p_{1j} = 0 = m_{ij}$. Posmatrajmo sada $i \geq 2$. Iz (1) i (10) lako zaključujemo da je $\Sigma_{k=1}^{n} k'_{ik} p_{kj} = p_{kj}$, čime je dokaz završen.•

Iz ove teoreme možemo odmah izvesti sledeću:

Teorema 9. Za prirodne brojeve n i r, za koje je ispunjen uslov $1 \le r \le n$, važi:

$$\binom{n-1}{r-1} = \sum_{k-r}^{n} C_{n-k+1}\left[\binom{k-1}{r-1} - 2\binom{k-2}{r-1} - \sum_{m-1}^{k-2} C_{k-m-1}\binom{m-1}{r-1}\right]. \quad (12)$$

Dokaz: Kako je $P_n = K_n M_n$, sledi:

$$p_{nr} = \sum_{k=1}^{n} k_{nk}\, m_{kr} = k_{n1}\, m_{1r} + k_{n2}\, m_{2r} + \ldots + k_{nn}\, m_{nr}\,.$$

Kako je $m_{kr} = 0$ za $k < r$, nepotrebno je računati ove brojeve u sumi. Sada se jasno vidi da važi jednakost (12).●

Posledica 4. Za svaki prirodan broj n važi:

$$1 = C_n - C_{n-1} - \sum_{k=3}^{n} C_{n-k+1}\,(1 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{k-2})$$

Dokaz: U formuli (12) stavimo da je r = 1, a odatle sledi:

$$1 = \sum_{k=r}^{n} C_{n-k+1}\left[\binom{k-1}{0} - 2\binom{k-2}{0} - \sum_{m=1}^{k-2} C_{k-m-1}\binom{m-1}{0}\right].$$

Kako je $\binom{i}{0} = 1$ za svako i, onda važi i gornja formula.●

Kako je Paskalova matrica inverzibilna, zaključujemo da važi $M_n^{-1} = P_n^{-1} K_n$. Odatle dobijamo formulu za inverznu matricu $M_n^{-1} = [m'_{ij}]$ matrice M_n:

$$m'_{ij} = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k+i}\binom{i-1}{r-1} C_{n-j+1} \quad (13)$$

Nije teško uočiti da važi $m'_{ij} = m'_{i-1,j-1} - m'_{i-1,j}$.

Primer za $n = 6$:

$$M_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 21 & 7 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 10. Za svaki prirodan broj n važi:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left[\sum_{m-1}^{k} (-1)^{k+m} \binom{n-1}{m-1} C_m \right].$$

Dokaz: Iz $C_n M_n = P_n$ sledi $C_n = P_n M_n^{-1}$, tj. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} m'_{kj}$. Za $i = n$ i $j = 1$ važi:

$$c_{n1} = C_n,\ p_{nk} = \binom{n-1}{k-1},\ m'_{k1} = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+k} \binom{n-1}{m-1} C_m .$$

Kada se ovi rezultati ubace u gornju jednakost, dobija se identitet naveden u teoremi.•

5. Zaključak

Glavna ideja ovog rada bila je da se ukaže na drugačiji pristup izvođenju kombinatornih identiteta. U uvodnom odeljku dat je pregled korišćenih matrica: Paskalove, Fibonačijeve i Katalanove i formirane inverzne Paskalove i Fibonačijeve matrice. Ceo odeljak posvećen je teoremi o inverznoj Katalanovoj matrici. Dalje su izučavane relacije među navedenim matricama, iz kojih je izvedeno više kombinatornih identiteta široko korišćenih Fibonačijevih i Katalanovih brojeva.

Literatura

Lee G. Y., Kim J. S., Cho S. H. 2003. Some combinatorial identities via Fibonacci numbers. *Discrete Applied Mathematics,* **130**: 527

Stefan Stanimirović and Mladen Pantić

Some Combinatorial Identities via Fibonacci and Catalan Matrices

In this paper we investigated matrix representations of Pascal, Fibonacci and Catalan numbers. Also, we proved some combinatorial identities involving Fibonacci and Catalan numbers using relations between this matrices.