Aleksandar Trokicić i Nikola Milosavljević

Određivanje granica Ramzejevih brojeva metodom slučajnih grafova

U radu su proučavana svojstva Ramzejevih brojeva sa ciljem poboljšanja granica za neke od njih. Rad je posebno koncentrisan na pomeranje donje granice za R(5, 5). Korišćena je metoda generisanja slučajnih grafova. Prikazane su dve heuristike u kojima su korišćene osobine nekih poznatijih slučajnih grafova.

1. Uvod

Ramzejeva teorema je fundamentalna teorema ne samo kombinatorike, već i diskretne matematike uopšte. Prvi ju je dokazao Frenk P. Ramzej (1903-930), briljantni engleski matematičar po kome je i dobila ime. Interesantno je da Ramzej ovu teoremu nije smatrao naročito značajnom, već ju je koristio kao usputnu lemu. Na kraju se pokazalo da je za njegov tadašnji rad ona bila nepotrebna. Međutim, od ove leme je nastala jedna nova teorija koja se bavi uslovima za postojanje pravilnih struktura u okviru nekih sistema.

Formalno, Ramzejeva teorema glasi:

Teorema 1 (Ramzejeva teorema). Neka su r, q_1 i q_2 prirodni brojevi za koje važi $r \geq 1$, $q_1 \geq r$, $q_2 \geq r$. Tada postoji najmanji prirodan broj $R(q_1, q_2; r)$, takav da za svaki prirodan broj $n \geq R(q_1, q_2; r)$ važi tvrđenje:

Ako je S proizvoljan n-skup, $P_r(S)$ skup svih r-podskupova skupa S i $P_r(S) = \Phi_1 \cup \Phi_2$, gde je $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$

onda bar za jedan broj $j \in \{1, 2\}$ postoji q_j-podskup skupa S, čiji su svi r-podskupovi sadržani u familiji Φ_j.

Broj $R(q_1, q_2; r)$ naziva se Ramzejev broj. •

Postoji i generalizacija ove teoreme. Međutim, ovaj oblik je dosta komplikovan za intuitivno razumevanje pa ćemo analizirati samo jedan specijalan slučaj teoreme za $r = 2$, koji ćemo navesti u drugom delu. Teorema će biti predstavljena u grafovskom obliku, što će je učiniti razumljivijom.

Aleksandar Trokicić (1989), Niš, Ćurlinska 55, učenik 4. razreda Gimnazije "Svetozar Marković" u Nišu

Nikola Milosavljević (1989), Niš, Zmaja od Noćaja 39, učenik 3. razreda Gimnazije "Svetozar Marković" u Nišu

Iako Ramzejeva teorema dokazuje egzistenciju Ramzejevih brojeva, ona nam nije od velike pomoći pri nalaženju istih. Samo su vrednosti nekolicine Ramzejevih brojeva određene, dok za ostale jedino postoje donje i gornje granice dobijene raznim metodama. Gornje granice su dobijene matematički, dok su donje granice, dobijene na isti način, nedovoljno dobre. Zato se koristi pomoć računara u vidu raznih heuristika. U ovom radu smišljeno je par heuristika koje koriste činjenicu da je graf uzet za model Ramzejeve teoreme. Heuristike u našem radu sastoje se u konstruisanju slučajnih grafova o kojim će biti reči u odeljku 3. One se baziraju na teoremama iz teorije grafova i osobinama nekih poznatih slučajnih grafova.

Sada ćemo uvesti definicije iz oblasti teorije grafova koje ćemo koristiti u radu.

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1. Prost graf G je uređen par (V, E) gde je $E \subseteq \binom{V}{2}$. Elementi skupa V zovu se čvorovi, a elementi skupa E grane grafa. U daljem tekstu ćemo prost graf zvati samo graf.

Definicija 2. Ako skup $\{a, b\}$ predstavlja granu, kaže se da je ona *incidentna* čvorovima a i b. Nasuprot tome, za čvorove a i b se kaže da su incidentni grani $\{a, b\}$. Dva čvora su susedna ako su incidentni istoj grani.

Definicija 3. Graf je povezan ukoliko postoji put između svaka dva njegova čvora.

Definicija 4. k-regularan graf je onaj graf kod koga je stepen svakog čvora k.

Definicija 5. C_n (kontura) je 2-regularan povezan graf sa n čvorova.

Definicija 6. Kompletan graf K_n je $(n - 1)$-regularan povezan graf.

Definicija 7. Ako je $A \subset V$ i $E_A = A \times A \cap \mathrm{E}$ onda ćemo $G_A = (A, E_A)$ nazvati podgrafom grafa G.

Definicija 8. p-klika je podgraf grafa G koji je kompletan graf i ima p čvorova.

2. Ramzejevi brojevi

Sada navodimo pojednostavljenu verziju Ramzejeve teoreme koja će nam biti od velikog interesa:

Teorema 2. Za svaki par prirodnih brojeva (p, q) postoji $R(p, q) \in \mathbb{N}$ tako da u svakom kompletnom grafu sa $R(p, q)$ ili više čvorova, čije su sve ivice ofarbane u crveno ili plavo, ili postoji p-klika čije su sve ivice crvene boje ili postoji q-klika čije su sve ivice plave boje.

Dokaz ćemo izvesti kasnije kao posledicu teoreme 5. Po definiciji uzimamo da je $R(1,n) = R(n,1) = 1$. Radi lakšeg razumevanja dokažimo par teorema:

Teorema 3. Ako je $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, onda je $R(m, 2) = m$.

Dokaz: Obojimo proizvoljno ivice grafa K_m crveno i plavo. Ako su sve ivice crvene onda on sadrži crvenu m-kliku. U suprotnom on sadrži bar jednu plavu ivicu, a samim tim i plavu 2-kliku. Prema tome $R(m,2) \leq m$. Posmatrajmo sada graf K_{m-1}. Ako sve njegove ivice obojimo u crveno, on ne sadrži crvenu m-kliku ni plavu 2-kliku. Prema tome $R(m,2) = m$.•

Teorema 4. $R(3, 3) = 6$.

Dokaz: Uočimo njegov proizoljan čvor v. Kako iz njega polazi 5 grana, po Dirihleovom principu bar 3 od njih su iste boje, npr. crvene. Označimo te grane sa va, vb i vc. Ako bi neka od grana ab, bc ili ca bila crvene boje, tada bi imali crvenu 3-kliku (trougao). Ako su sve ofarbane u plavo onda imamo plavu 3-kliku abc. Prema tome $R(3, 3) \leq 6$. Sada je dovoljno naći bojenje za K_5 koje ne zadovoljava uslove teoreme 2, npr. ivice koje okruzuju graf bojimo u plavo a "zvezdu" u crveno. Ovim je dokaz završen.•

Teorema 5. Ako su m, n prirodni brojevi i $m, n \geq 3$ tada je:

$$R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$$

Dokaz: Neka je $N = R(m,n-1) + R(m-1, n)$ i posmatrajmo neko bojenje grafa K_N. Uzmimo proizvoljan čvor $v \in V$ i neka je A skup čvorova koji su susedni sa v preko crvene ivice, a B skup čvorova koji su susedni sa v preko plave ivice. Kako je $|A| + |B| = N-1$ onda je $|A| \geq R(m-1,n)$ ili $|B| \geq R(m, n-1)$, jer bi u suprotnom bilo $|A| + |B| < N-1$. Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $|A| \geq R(m-1, n)$. Sada imamo dva slučaja:

1. Podgraf (A, E_A) sadrži $(m-1)$-kliku sa svim crvenim ivicama i skupom čvorova A_R. Tada $A_R \cup \{v\}$ čini skup čvorova koji su svaki sa svakim povezani crvenom ivicom, tj. graf K_N sadrži m-kliku crvene boje.

2. Podgraf (A, E_A) sadrži n-kliku plave boje pa sledi da je i K_N sadrži.•

Posledica. Sada se indukcijom po $m + n$ može lako dokazati teorema 2 (Ramzejeva teorema) ograničavanjem odgovarajućeg broja odozgo.

Teorema 6. Ako su $m, n \geq 3$ prirodni brojevi onda važi:

$$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$$

Dokaz: Indukcijom po $m+n$.

Baza: $R(3, 3) = \binom{4}{2} = 6$

Indukcijska hipoteza: Ako je $k + 1 < m + n$, tada je

$$R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$$

Indukcijski korak: Iz teoreme 5 imamo:

$$R(m,n) \leq R(m,n-1)+R(m-1,n) \leq \binom{m+n-3}{m-2}+\binom{m+n-3}{m-1}$$

$$R(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1} \bullet$$

Teoremama 3 i 4 iscrpli smo skoro sve tačno određene vrednosti Ramzejevih brojeva. Neke do sada izračunate vrednosti možemo videti u sledećoj tabeli.

Tabela 1. Vrednosti, odnosno granice za $R(p, q)$

p	q					
	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	3	6			
4	1	4	9	18		
5	1	5	14	25	43–49	
6	1	6	18	35–41	58–87	102–165

Brojevi $R(4, 6)$, $R(5, 5)$ i $R(10, 3)$ i veći još uvek nisu izračunati već su samo ograničeni na nekom intervalu iako su im argumenti mali. To su trenutno najbolje poznate granice za njih. Kao što je pomenuto gornje granice su dobijene bez pomoći računara i uglavnom su bazirane na teoremi 5, dok se za donju granicu koriste drugačiji matematički aparati i pomoć računara. Pokazaćemo jednu poznatiju nejednakost za donju granicu u čijem se izvođenju koristi teorija verovatnoće.

Teorema 7. Za svaki prirodan broj $k \geq 4$ važi:

$$R(k, k) = 2^{k/2}$$

Dokaz: Pretpostavimo suprotno da je $N < 2^{k/2}$ i posmatrajmo sva bojenja ivica grafa K_N u crveno i plavo, gde je svaka ivica bojena u crveno sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Sledi da je verovatnoća da se dobije neko bojenje $2^{-\binom{N}{2}}$. Neka je A podskup čvorova grafa K_N veličine k. Ako je $D_R(A)$

događaj kada je podgraf G_A crvene boje onda je $P(D_R(A)) = 2^{-\binom{k}{2}}$. Sledi da je verovatnoća da u grafu K_N postoji podgraf crvene boje ograničena sa:

$$p_r = P(\bigcup_{|A|=k} D(R(A)) \le \sum_{|A|=k} P(D_R(A)) = \binom{N}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$$

Kako je $\binom{N}{k} \le \frac{N^k}{2^{k-1}}$ sledi:

$$p_r \le \binom{N}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \le \binom{N}{k} \le \frac{N^k}{2^{k-1}} \cdot 2^{\binom{k}{2}}$$

$$p_r < 2^{\frac{k^2}{2} - \binom{k}{2} + 1} < 2^{1 - \frac{k}{2}} < \frac{1}{2}$$

Zbog simetrije je i $p_b < \frac{1}{2}$, pa je $p_r + p_b < 1$ što je kontradikcija.●

Iako jedna od boljih ograničenja sa donje strane, iz tablice se vidi da su ograničenja za manje brojeve dosta veća. To je upravo zbog upotrebe računara. Gornja granica se ne može pomeriti uz pomoć računara jer je potrebno biti siguran da za svako bojenje grafa date veličine postoji bar jedna od odgovarajućih klika. Međutim, to se ne može uraditi u polinomijalnom vremenu, jer broj mogućnosti eksponencijalno raste u funkciji od broja čvorova. Sa druge strane, za poboljšanje donje granice dovoljno je naći samo jedan kontraprimer, tj. neko bojenje grafa date veličine koje ne zadovoljava uslove teoreme 2. Ovaj problem je dosta težak zbog velikog broja različitih bojenja ali ne moraju se ispitati svi slučajevi. Možemo uz pomoć heuristika generisati slučajno obojen graf na takav način da verovatnoća da ne sadrži odgovarajuće klike bude što veća, a zatim treba proveriti da li je to zaista slučaj. Za male vrednosti Ramzejevih brojeva (npr. $R(5, 5)$, $R(4, 6)$) ovo radi veoma brzo i ako se slučajni grafovi dobro generišu moguće je pomeriti granicu ako trenutna donja granica nije odgovarajući Ramzejev broj. To je cij našeg rada.

3. Slučajni grafovi

Slučajan graf je graf sa osobinom da je broj čvorova, ivica i veza između njih određen slučajno. Proučavanje slučajnih grafova je počelo krajem 50-ih godina prošlog veka uporedo sa razvojem teorije grafova, a prvi su ih definisali Erdoš i Renji.

Krajem 20. veka istraživanja su pokazala da raspodele povezanosti realnih mreža, kao što su www, Internet, metaboličke mreže, itd. prate stepeni zakon:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

gde je $P(k)$ verovatnoća da je proizvoljan čvor u mreži stepena k. Ovakve mreže se nazivaju scale-free mreže. Većina scale-free mreža ima vrednost koeficijenta γ u intervalu $(2, 3]$. Karakteristika im je veliki broj čvorova malog stepena i mali broj čvorova velikog stepena. Scale-free mreže su se pokazale kao vrlo uspešne u modeliranju društvenih, bioloških i mnogih drugih mreža. U jednoj od heuristika ćemo koristiti ovaj model mreža. Za ograničavanje broja grana od velikog je značaja i sledeća teorema:

Teorema 8 (Tjuranova teorema). Neka graf $G = (V, E)$ sa n čvorova nema p-kliku. Tada je:

$$|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{n^2}{2}$$

Dokaz: Indukcijom po n.

Baza: Ako je $n < p$, graf očigledno nema p-kliku, nezavisno od broja ivica. Kako je $|E| \leq \binom{n}{2}$, dovoljno je dokazati:

$$\binom{n}{2} \leq (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{n^2}{2}$$

što je ekvivalentno sa $n \leq p - 1$, što je tačno prema pretpostavci.

Indukcijska hipoteza: Za svako $n = k$ važi:

$$|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{n^2}{2}$$

Indukcijski korak: neka je $n = k$. Graf G sigurno sadrži $(p - 1)$-kliku jer bismo u suprotnom mogli dodati još jednu ivicu, a da ne napravimo p-kliku. Sa A ćemo označiti podskup čvorova grafa G koji je $(p - 1)$-klika, a sa B skup čvorova za koji važi $B = V \backslash A$.

Podgraf G_A sadrži $e_A = \binom{p-1}{2}$ ivica, podgraf G_B sadrži e_B ivica i $e_{A,B}$ će nam predstavljati broj ivica koje povezuju čvorove iz skupova A i B. Iz indukcijske hipoteze sledi:

$$e_B \leq (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{(n-p+1)}{2}$$

Kako G nema p-kliku sledi da je svaki čvor $v_j \in B$ susedan sa najviše $p - 2$ čvorova iz A jer bi u suprotnom postojala p-klika. Odavde dobijamo:

$$e_{A,B} = (p-2)(n-p+1)$$

Kako je $|E| = e_B + e_A + e_{A,B}$ sledi:

$$e_B \leq (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{(n-p+1)^2}{2} + (p-2)(n-p+1) + \binom{p-1}{2}$$

Odakle dobijamo:

$$|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{n^2}{2} \bullet$$

Primetimo da nam ova teorema daje granicu za broj ivica obojenih crvenom, odnosno plavom bojom. Zaista, ako izbacimo sve ivice obojene plavom bojom onda naš graf, prema Tjuranovoj teoremi, ne sme da ima više od $(1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{n^2}{2}$ crvenih ivica, gde je p veličina crvene klike koju ne želimo u grafu. Takođe, broj ivica obojenih crvenom bojom ne sme da bude ni premali inače ćemo imati plavu kliku. Nije teško videti da je minimum crvenih ivica jednak $\binom{n}{2} - (1 - \frac{1}{p-1}) \cdot \frac{n^2}{2}$, gde je q veličina plave klike koju ne želimo u grafu.

3.1. Heuristika 1

Ideja je napraviti slučajni graf koristeći scale-free mreže, generišući iste koristeći model sličan modelu Barabaši-Albert.

Posmatrajmo Ramzejev broj $R(5, 5)$. Sve što o njegovoj vrednosti znamo je $43 \leq R(5, 5) \leq 49$. Cilj nam je da konstruišemo graf koji neće sadržati 5-kliku ni plave ni crvene boje. Počećemo od K_{43}. Smatraćemo da ako između dva čvora u našem slučajnom grafu postoji ivica onda je ona crvena, inače je plava. Iz Tjuranove teoreme možemo izračunati da broj ivica našeg slučajnog grafa od 43 čvora mora biti u intervalu [210, 693]. Heuristika se bazira na tome da ćemo posle konsturisanja slučajnog grafa biti sigurni da on ne sadrži crvenu 5-kliku, već će biti dovoljno proveriti da li sadrži plavu 5-kliku. Opisaćemo je u nekoliko koraka:

1. Na početku konstruišemo K_4.

2. U svakom sledećem koraku dodajemo po jedan novi čvor i 3 grane koje povezuju taj novi čvor sa neka 3 prethodno ubačena čvora. Svakom čvoru u u do sada konstruisanom grafu dodeljujemo verovatnoću da postoji grana između njega i čvora koga ubacujemo. Uzeli smo da je ova verovatnoća srazmerna stepenu datog čvora. Postupak dodavanja čvorova nastavljamo dok ne dođemo do unapred zadatog broja čvorova, u našem slučaju 43. Primetimo da ovaj graf ne može da ima 5-kliku. Zaista, pretpostavimo suprotno. Neka je v čvor koji pripada 5-kliki i koji je poslednji ubačen u slučajni graf od svih čvorova iz te klike. Prema tome on je povezan sa najviše 3 od 4 čvora iz te 5-klike.

Kontradikcija. Prema tome, u ovom trenutku imamo graf sa traženim brojem čvorova koji je bez 5-klike.

3. Sledeći korak je dodavanje ivica našem grafu, pazeći da se ne pojavi 5-klika, do trenutka kada dodavanjem bilo koje ivice sigurno dobijamo 5-kliku. Ovog puta verovatnoća da ubacimo ivicu uv je obrnuto srazmerna

broju zajedničkih suseda čvorova u i v. Na osnovu toga izaberemo ivicu uv. Zatim proverimo sve trojke $\{a, b, c\}$ čvorova našeg grafa različite od u i v. Mogu se desiti dva slučaja:

1. Neka od trojki zajedno sa čvorovima u i v obrazuje 5-kliku. Tada nećemo ubaciti ivicu između u i v i dodeljujemo toj ivici verovatnoću 0.
2. Ne postoji trojka čvorova koja sa u v obrazuje 5-kliku. Tada ubacujemo ivicu uv i menjamo odgovarajuće verovatnoće.

Sledi pseudokod:

```
ubaci p-4 kliku
za svako 5 ≤ i ≤ 43
      ubaci i-ti čvor u graf
      na osnovu verovatnoće poveži i-ti čvor sa neka prethodna 3
      sredi verovatnoće
BrGrana=0
Postavi početne verovatnoće
while (postoji par čvorova sa verovatnoćom ≠ 0) do begin
      slučajno izaberi neku ivicu uv
      if (ivica uv ne pravi kliku) then
            BrIvica:=BrIvica+1
            dodaj ivicu uv i sredi verovatnoće
      else
      postavi verovatnoću za uv na 0
end while
napravi komplement datog grafa i proveri da li ima 5-kliku
```

3.2 Heuristika 2

Naš cilj je bio da napravimo heuristiku koja će imati što više grana, a neće imati 5-kliku. Zbog toga je naš početni graf $G = (V, E)$ imao dvadesetdve 4-klike:

$$V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{22} \left\{(v_i,v_{i+1}), (v_{i+22},v_{i+23}), (v_i,v_{i+23}), (v_{i+1},v_{i+22}), (v_i,v_{i+22}), (v_{i+1},v_{i+23})\right\}$$

Kada napravimo graf G u njega slučajno ubacujemo ivice, s tim što nemaju sve istu verovatnoću. Za ivicu (u, v) imamo tri slučaja:

– Ako je čvor u spojen sa tri čvora iz 4-klike kojoj pripada čvor v onda je verovatnoća da se ta ivica ubaci jednaka 0.

– Ako je čvor u spojen sa dva čvora iz 4-klike kojoj pripada čvor v onda je verovatnoća da se ta ivica ubaci jednaka 1.
– Ako je čvor u spojen sa jednim čvorom iz 4-klike kojoj pripada čvor v onda je verovatnoća da se ta ivica ubaci jednaka 2.

Ako je čvor u nije spojen ni sa jednim čvorom iz 4-klike kojoj pripada čvor v onda je verovatnoća da se ta ivica ubaci jednaka 3.

Pseudokod:

za svako $i \in \{1, \dots, 22\}$
ubaci ivice $\{(i, i+1), (i+22, i+23), (i, i+23), (i+1, i+22)\}$
$\{(i, i+22), (i+1, i+23)\}$
za svako (i, j) $p[i, j] = 3$
za svaku prvobitnu ivicu (i, j) i (j, k) $p[i, k]$--
za svaku ivicu (i, j) $p[i, j]$=0
za svako (i, j) $p[i, j]$ = min ($p[i, j]$, p[j, i])
while (nije ubačeno m ivica) do begin
    za svako (i, j) sum$p$+=$p[i, j]$
    rivica = random(sum$p$) + 1
    za svako i, za svako j
        if (traži ≥ $r$ivica) then
            ri=i; rj=j;
            break;
    if (ivica (ri, rj) čini 5-kliku) then
        ponovo slučajno biraj ivicu
        izb++
        if (izb > 400) then izadji iz programa
    sredi verovatnoće
end while

3.3. Random generator

Random generator koji smo koristili u kodu je veoma prost. Baziran je na principu “točka sreće”. Neka imamo n elementa i neka je verovatnoća da izaberemo i-ti direktno proporcionalna sa a_i. Tada postavimo n segmenta dužina $a_1, a_2, \dots a_n$ na interval dužine $\Sigma_{i=1}^{n} a_i$, slučajno izaberemo broj iz tog intervala i jednostavno odredimo kom segmentu on pripada. Ako imamo obrnute proporcije, koristimo segmente dužina $\lfloor \frac{x}{a_1} \rfloor$, $\lfloor \frac{x}{a_2} \rfloor$, … $\lfloor \frac{x}{a_n} \rfloor$ i interval dužine $\Sigma_{i=1}^{n} \lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor$, gde je x pozitivan broj (u našim kodovima smo koristili $1000 \le x \le 100000$).

4. Zaključak

Nekoliko najboljih rezultata prve i druge heuristike prikazani su u tabeli 2:

Tabela 2. Najbolji rezultati prve i druge heuristike

Prva heuristika		Druga heuristika	
broj plavih *p*-klika	broj ivica	broj plavih *p*-klika	broj ivica
862	516	4721	280
910	503	4786	286
923	526	4818	279
964	526	5015	293
967	513	5107	284

Prva heuristika se pokazala kao veoma "nestabilna" tj. davala je relativno dobre rezultate, ali i veoma loše (npr. bilo je random grafova kod kojih su skoro svi čvorovi bili povezani sa prvih 5-6 čvorova, verovatno zbog povremenog lošeg generisanja Barabaši-Albert modela). Druga heuristika se pokazala kao mnogo stabilnija. Broj plavih 5-klika je uvek bio u intervalu [4700, 6000] a broj ivica oko 300. Međutim, ova heuristika ne daje dovoljno dobre rezultate i u tom pogledu je slabija od prve.

Literatura

[1] Stevanović D., Milošević M., Baltić V. 2004. *Diskretna matematika*. Beograd: Društvo matematičara Srbije.

[2] Aigner M., Günter M. 2004. *Proofs from THE BOOK*. Berlin: Springer.

[3] Nenadov R. 2005. Heuristike za rešavanje NP-kompletnih problema na scale-free mrežama. *Petničke sveske*, 58: 107.

[4] Radulaški M. 2006. Parametri i podstrukture scale-free mreža. *Petničke sveske*, 58: 15.

[5] Barabasi A. L., Albert R. 1999. Emergence of scaling in random networks scale-free networks. *Science* **286**(5439): 509

[6] Mladenović P. 2003. *Kombinatorika* Beograd: Društvo matematičara Srbije.

Aleksandar Trokicić and Nikola Milosavljević

Determing the Bounds of Ramsey's Numbers Using Random Graphs

In this paper we have studied the properties of Ramsey's numbers in order to improve bounds for some of them. The main purpose of this paper is moving the lower bound for $R(5,5)$ by using random graphs. We presented two heuristics where we used some properties of known random graphs.