Stevan Radanović i Uroš Delić

Haos u kapanju vode

U ovom radu je posmatrana pojava haosa u kapanju vode, tj. u vremenskim intervalima između dve kapi. Za merenje vremenskih intervala je korišćen laser na sledeći način: kapljice su padale ispred njega i tako presecale laserski zrak, što je dovodilo do promena vrednosti intenziteta zračenja na detektoru. Pri povećavanju visine vodenog stuba u posudi iz koje je kapala voda dolazilo je do skraćivanja perioda između dve kapi. Zatim je dolazilo do udvajanja perioda, jedne od osnovnih karakteristika haosa. Kapljice su se formirale na relativno malom kružnom prorezu ($S \sim 1$ mm^2). Potvrđeno je postojanje haosa u kapanju vode i prelazak u haos putem bifurkacija i intermitencija.

Uvod

Američki meteorolog i matematičar Edvard Lorenc (Edward Lorenz) napisao je prvu simulaciju vremenskih uslova 1960. godine. Zadajući približno iste početne vrednosti promenljivima u dva navrata, ustanovio je da se posle dovoljno dugog vremena te vrednosti značajno razlikuju. Ovaj efekat je kasnije definisan kao: osetljiva zavisnost od inicijalnih uslova, a popularno nazvan efekat leptira: "jedan leptir, koji zamahom krila uskomeša vazduh u Pekingu danas, može time bitno izmeniti olujne sisteme iznad Njujorka kroz mesec dana" (Gleick 2001). To je bio početak razvoja teorije haosa. Osnovna karakteristika svih haotičnih sistema je da su nelinearni. Linearni sistemi ne prelaze u haos. Ovo je jedan od osnovnih razloga zašto se teorija haosa proučava tek u drugoj polovini XX veka. Računari, koji su omogućili numeričko rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina sa zadovoljavajućom tačnošću, do tada nisu postojali. Haos je otkriven u mnogim pojavama, kako u fizici, tako i u ekonomiji, arhitekturi, biologiji, tehnici i drugim sferama ljudskog interesovanja.

Robert Šo (Robert Shaw) je 1984. godine, koristeći slavinu priključenu na vodovodnu mrežu, merio periode između susednih kapljica i za određene vrednosti protoka prvi ustanovio postojanje haotičnog režima u

Stevan Radanović (1985), Sremska Mitrovica, Arsenija Čarnojevića 8/14, učenik 4. razreda Gimnazije "Ivo Lola Ribar" u S. Mitrovici

Uroš Delić (1985), Novi Beograd, III bulevar 26/10, učenik 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Stevan Nađ-Perge, student Fizičkog fakulteta u Beogradu

kojem ne postoji pravilnost u ritmu kapanja. Naime, kada se česma odvrne dovoljno da voda kaplje iz nje, isprva je taj ritam ujednačen, kapljice se javljaju u jednakim intervalima, koji se skraćuju kako odvrćemo slavinu, tj. povećavamo protok. U jednom trenutku, vremenski interval između druge i prve kapljice postaje nejednak onome između treće i druge i postoje tačno dva perioda koja se naizmenično smenjuju, što znači da je došlo do udvajanja perioda. Ako se protok i dalje povećava, posle određenog broja udvajanja perioda uslediće prelazak u haos, tj. postojaće beskonačno mnogo vrednosti mogućih perioda, pri čemu niko ne može reći koliki će biti sledeći interval. U isto vreme, za vreme povećanja protoka je moguće primetiti određene haotične faze u kapanju vode, tj. na nekoliko trenutaka voda kaplje kao da se nalazi u haotičnom režimu. Ono što je posebno zanimljivo je to da se ti periodi produžuju što je sistem bliži potpunom prelasku u haos.

Ispravnost Šoovih rezultata je potvrđena više puta od strane drugih naučnika.

Udvajanje perioda i intermitencije

Scenario prelaska u haos udvajanjem perioda će najlakše biti objašnjen na primeru "logističke karte". Posmatrajmo parabolu određenu funkcijom:

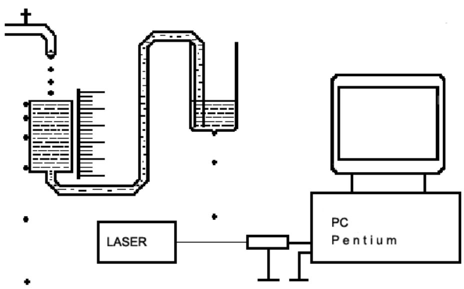
$$x_{n+1} = r\,x_n(1 - x_n)$$

prateći dinamiku vrednosti x u zavisnosti od parametra r. Za vrednosti parametra r između 0 i 4 data funkcija preslikava interval (0,1) na samog sebe. Pratimo kuda odlaze brojevi kada n raste. Za dovoljno malo r sistem posle kraćeg kolebanja dostiže jednu konstantnu vrednost koja se zatim ponavlja iznova i iznova. Povećavanjem r preko prve kritične vrednosti ($r = 3$) više nema jedne, nego dve vrednosti koje se ponavljaju u pravilnom ritmu, prvo jedna, pa druga. Zatim ponovo dolazi do udvajanja perioda i tada postoje četiri perioda koji se opet ponavljaju u istom rasporedu. Broj perioda raste, svaki put uvećan dva puta, do određene tačke kada dođe do haosa, tj. postoji beskonačno mnogo mogućih perioda koji se ne pojavljuju nekim određenim redosledom. Zavisnost x od r se prikazuje na bifurkacionom dijagramu, koji jasno ukazuje na mesta udvajanja perioda.

Pored udvajanja perioda, potrebno je objasniti i scenario intermitencija. Intermitencije su naizmenične periodično-haotične faze u dinamici sistema koje postoje za istu vrednost parametra r. U početku su haotični periodi kratki i retki, a što se sistem više približava tački prelaza u haos, intervali haotičnog kretanja sistema postaju sve duži i češći, dok na kraju ne ostaje ništa osim haosa (Belić 1990).

Metod i aparatura

U ovom eksperimentu se prati zavisnost vremenskog intervala između *n*-e i *n*+1-e kapljice u funkciji od relativne visine vodenog stuba, tj. pritiska. Osnovni problem prilikom izvođenja ovog eksperimenta su fluktuacije pritiska u vodovodu, budući da on predstavlja parametar koji kontrolišemo. Ovaj problem je prevaziđen korišćenjem sistema spojenih sudova. Slika 1 prikazuje korišćenu aparaturu. Voda je konstantno dopu-njavala prvu posudu do vrha. Ta posuda je pomerana po vertikali pomoću stalka sa nonijusom, a povezana je sa drugom posudom (čašom) iz koje je voda kapala. Obe posude su bile dovoljno velikog poprečnog preseka, te je efekat kvašenja ivica suda bio zanemarljiv. Za detektovanje prolaska kapljica je korišćen He-Ne laser sa detektorom. Kapi su, delujući kao sočiva, rasipale laserski snop, što bi detektor registrovao kao promenu intenziteta zračenja.



Slika 1. Prikaz aparature

Figure 1. Instrumental setup

Detektor je podešen tako da registruje intenzitet laserskog zraka 1000 puta u sekundi, tj. na vremenski interval $t = 10^{-3}$ s. Za svaku visinu vodenog stuba su rađena dva do tri merenja od po 10 minuta. U Pascalu su napisani programi za pretvaranje dobijenog signala u vremenski interval između *n*-e i *n*+1-e kapljice i za prebrojavanje intervala iste vrednosti sa određenim korakom. Za prebrojavanje intervala je odabran korak $t = 10^{-3}$ s. Kao referentna visina vodenog stuba u ovom eksperimentu je uzeta visina za koju sistem ima jednu vrednost perioda između dve susedne kapi, tj. pre pojave udvajanja perioda ili ostalih karakterističnih znakova haosa. Sve ostale visine su izražene u odnosu na nju.

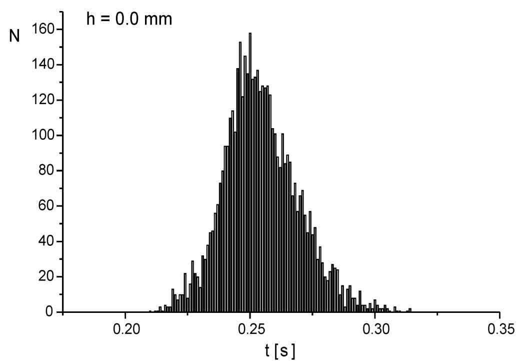
Potrebno je istaći da je tema "Haos u kapanju vode" već rađena u IS Petnica 1999. godine (Nenin i Marić 2000). Postoje tri osnovne novine u našem eksperimentu: za određivanje perioda između kapljica je korišćen laser, kapljice su se formirale na malom kružnom prorezu na dnu plastične čaše, a protok je regulisan promenom visine vodenog stuba. U radu iz 1999. godine je za detekciju kapljica korišćen mikrofon na koji su kapljice padale, pa je program bio podešen da zanemari drugu od dve kapljice između kojih je razmak manji od "mrtvog vremena", $t = 0.015$ s. Kod lasera je ovo vreme zanemarljivo malo, te smo bili u stanju da ispitamo i haotični režim kapanja.

Rezultati i diskusija

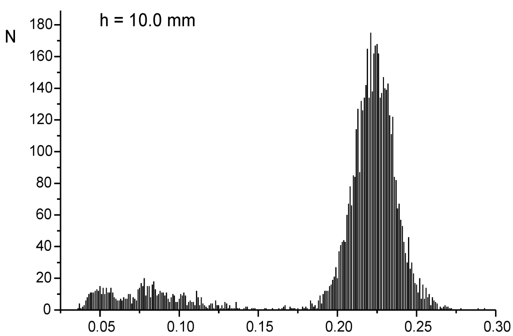
Dobijeni rezultati su obrađeni, a ovde su izneseni samo oni grafici koji najbolje opisuju prethaotični režim i pojavu haosa u kapanju vode, podeljeni u sledeće grupe:

– Histogrami perioda između dve kapljice, za koje je bilo očekivano da nam ukažu na pojavu udvajanja perioda,
– Grafici zavisnosti *n+1*-og od *n*-og perioda, sa kojih je trebao da se uoči intermitentni prelazak u haos, uz potvrdu informacije o udvajanju perioda, dobijenu sa histograma i
– Grafici zavisnosti *i*-og perioda od *i*, koji su nosioci gotovo istih osobina kao i grafici zavisnosti *n+1*-og od *n*-og perioda.

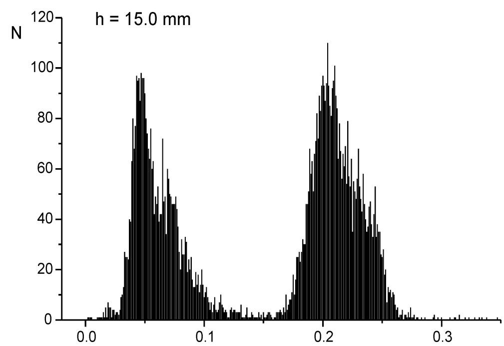
Na slici 2 uočava se pojava udvajanja perioda. Za referentnu visinu vodenog stuba (histogram 2a) je izražena samo jedna vrednost perioda, dok za relativnu visinu h = *10.0 mm* uočavamo pojavu drugog perioda, kao i smanjenje vrednosti preovlađujućeg perioda u odnosu na $h = 0.0$ mm (2b). Već na visini $h = 15.0$ mm (2c) pik drugog perioda dostiže vrednost prvog, te konstatujemo da je došlo do udvajanja perioda.



a



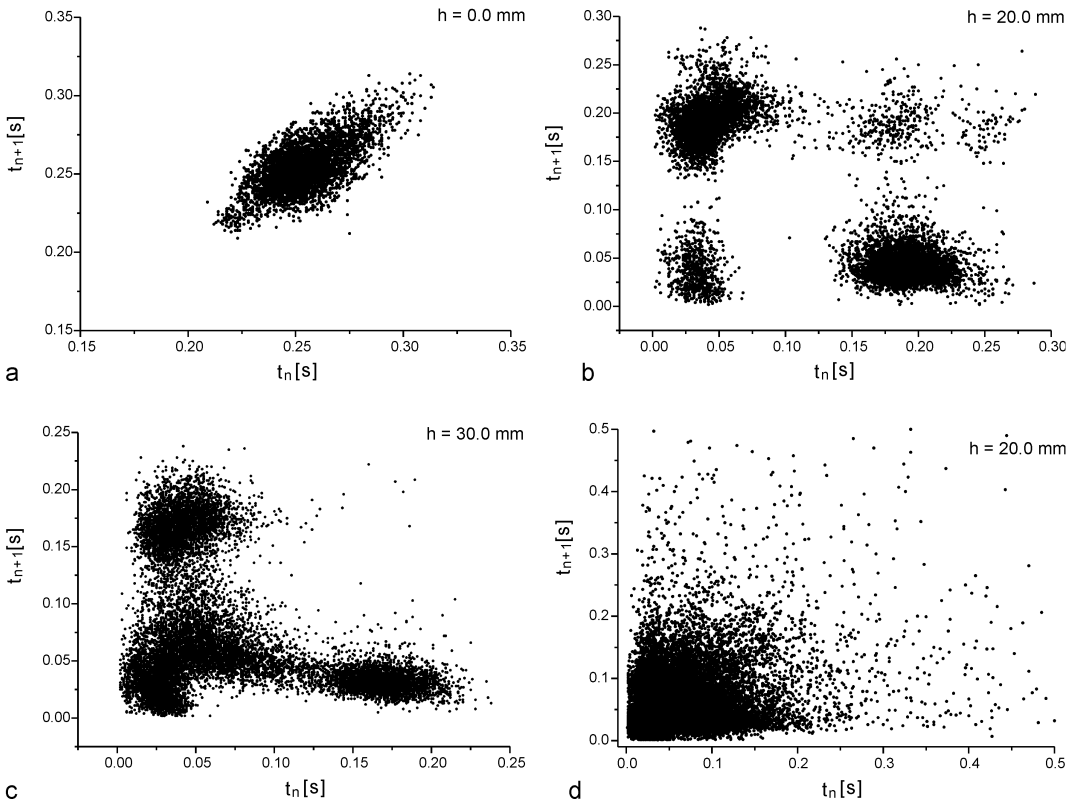
b



c

Slika 2. Histogrami perioda između dve kapi za visine h = 0 mm, h = 10 mm i h = 15 mm

Figure 2. Histograms of the period between two drops for heights h = 0 mm, h = 10 mm i h = 15 mm

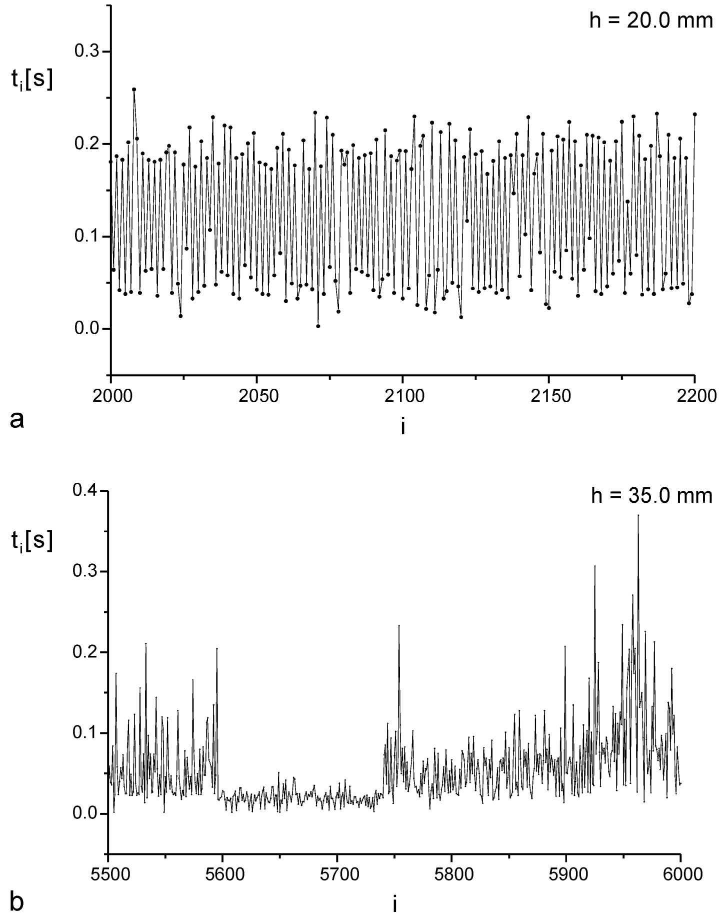


Slika 3. Zavisnost n+1-og od n-og perioda

Figure 3. Dependance of $n+1^{\text{th}}$ period from n^{th} period

Kao što je već objašnjeno, jedna od bitnih karakteristika prethaotičnog režima je redosled dobijanja merenih vrednosti kada postoji više od jednog perioda, te su grafici zavisnosti *n+1*-og od *n*-og perioda na slici 3 pokazivači da li je zaista došlo do udvajanja perioda u okviru prelaska u haos ili je reč o nečemu drugom. Kao što smo konstatovali, za visinu h = 0.0 mm imamo jednu vrednost perioda, što se uočava i na grafiku 3a. Grafik 3b ukazuje na pojavu udvajanja perioda, jer najčešće posle dužeg dolazi kraći period, i obrnuto. Tačke koje ne pripadaju ni jednoj od ove dve grupe objašnjavamo kao kratke haotične intervale, tj. intermitentnim prelaskom u haos. Intermitencija se još bolje uočava na grafiku 3c po tome što više ne postoje jasno izražene vrednosti perioda. Sistem, za visinu h = 35.0 mm, prelazi u haos, što se primećuje na grafiku 3d.

Drugi način da se prikaže osobina prelaska u haos je dat na slici 4. Predstavljeni su grafici zavisnosti i-tog perioda od i. Grafik 4a je urađen na osnovu podataka dobijenih za visinu $h = 20.0$ mm (visina na kojoj je već došlo do udvajanja perioda). Primećuje se da u većini slučajeva posle kraćeg sledi duži period, i obrnuto. Na grafiku 4b se primećuje da na visini $h = 35.0$ mm dolazi do pojave haosa, tj. beskonačnog broja mogućih perioda. I na ovom grafiku se pojavljuju sekvence od oko 100 do 200 uza-



Slika 4.
Promena perioda u vremenu

Figure 4.
Change of the period through time

stopnih perioda koji imaju izrazito manju vrednost od uobičajenih, a koje, skalirane po *y*-osi, podsećaju na ostale sekvence većih pikova. Za ovu pojavu nismo mogli da nađemo objašnjenje.

Zaključak

Ustanovili smo postojanje haosa u kapanju vode. Takođe, u saglasnosti sa radom Nede i saradnika (1995), registrovali smo pojavu intermitentnog prelaska u haos. Time smo potvrdili da udvajanje perioda nije jedini scenario prelaska u haos za ovaj sistem.

Postoje još mnoge mogućnosti za buduće projekte koje nismo mogli da dotaknemo, zbog vremenskih ili resursnih ograničenja: ispitivanje haosa u obliku, odnosno veličini kapljice, što podrazumeva upotrebu sofisticiranijeg detektorskog sistema radi što tačnijeg određivanja vremenskog intervala potrebnom kapljici da prođe ispred lasera, ispitivanje zavisnosti prelaska u haos od oblika i veličine otvora na kojem se formiraju kapljice, kao i ispitivanje osobine zavisnosti predstavljene na slici 4b.

Literatura

Belić M. 1990. *Deterministički haos*. Beograd: Institut za teorijsku fiziku

Gleick J. 2001. *Haos*. Beograd: Narodna knjiga

Neda Z., Bako B., Rees E. 1995. *The Dripping Faucet Revisited*. Cluj-Napoca, Romania: Department of Physics, Babes Bolyai Universitz

Nenin M., Marić B. 2000. *Haos u kapanju vode*. Petničke sveske 49: 29

Stevan Radanović and Uroš Delić

Chaos in Dripping Water

The topic of this study is the appearance of chaos in water dripping, that is in time intervals between two drops. In order to get time intervals, a laser was used as follows: drops fell in front of the laser ray thus causing a change in radiation intensity on the detector. By raising the height of the water column in the dish from witch the water was dripping (which also meant increasing the pressure and flow) the period between two drops was shortened. Then bifurcation appeared, that is division of the period, which is one of the main characteristics of chaos. The drops were formed on a relatively small circular cut.

In this experiment the height for which the system has one value of interval between two consecutive drops, that is before the appearance of interval division or some other characteristic sign of chaos, was taken as a referent height of the water column. All other heights are expressed in accordance with it.

Three histograms where the interval division can be seen are shown on figure 2. Figure 3 represents the dependence of the n+1$^{\text{th}}$ interval on the n^{th} interval, which clearly shows whether or not there is chaos. The graphs in Figure 4 represent the dependence of the i^{th} interval on i. The existence of chaos in water dripping was confirmed, as well as the process of change into chaos by means of bifurcation and intermittence.