Biljana Bajić, Ivan Stanimirović i Tijana Kovačević

Ispitivanje magičnosti grafa po čvorovima

Ispitivani su grafovi magični po čvorovima i na osnovu dokazanih teorema ispitana je magičnost za konture, puteve i točkove. Osim toga, napravljen je kratak računarski program pomoću kojeg je analiziran spektar, odnosno zavisnost broja rešenja od konstante magičnosti h *(broj koji predstavlja zbir težina čvora* v *i svih grana koje polaze iz njega). Dokazano je da su sve konture i svi putevi, kao i neki točkovi, magični po čvorovima.*

Uvod

Magični kvadrati su još od antičkih vremena bili jedna od najpopularnijih matematičkih zabava. Ranih 1960-tih, Sedlaček se zapitao da li se magičnost može primeniti na grafove. Nekoliko godina kasnije, Kotzig i Rosa formulisali su problem numeracije grafova (Wallis 2001). Numeracija je pridruživanje prirodnih brojeva skupu elemenata grafa: čvorovima ili granama. To se može uraditi na različite načine. Najinteresantniji od njih su oni gde se brojevi pridružuju i čvorovima i granama bez ponavljanja.

Magični grafovi su dosta kratko proučavani, jer su bili potisnuti novim problemom gracioznih grafova, te postoji dosta otvorenih problema u ovoj oblasti. S druge strane, rešenja tih problema su sve traženija, jer grafovi postaju sve aktuelniji, pronalazi se sve više njihovih različitih primena u svetu kompjutera i industriji. Tako se na primer magični grafovi koriste u povezivanju linkova. Pretpostavimo da treba dodeliti adrese nekim linkovima na internetu. Potrebno je da sve adrese budu različite i da se mogu pronaći pomoću dva povezana linka. To je rešeno korišćenjem magičnosti po granama.

Dakle, problema vezanih za magične grafove je sve više, potražnja za njima je sve veća, te oni predstavljaju veliki izazov mladim matematičarima, bar je to bio slučaj sa nama.

U ovom radu ispitivana je magičnost grafa po čvorovima. Urađen je program kojim je ispitana magičnost za neke točkove, put i konturu i analiziran odnos broja rešenja u zavisnosti od konstante h.

Biljana Bajić (1985), Novi Sad, Narodnog fronta 89, učenica 3. razreda Gimnazije "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu

Ivan Stanimirović (1986), Leskovac, Veljka Vlahovića 15, učenik 2. razreda Gimnazije u Leskovcu

Tijana Kovačević (1987), Beograd, Kuršumlijska 6/A, učenica 1. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

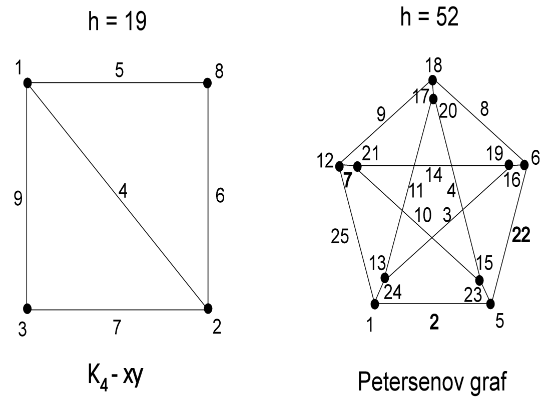
Preliminarije

U ovom delu definisaćemo samo neke nove pojmove vezane konkretno za magičnost grafova po čvorovima. Sve druge definicije mogu se pronaći kod V. Petrovića (Petrović 1998).

Definicija 1. *Graf G je* ***magičan po čvorovima*** *ako postoje bijekcija* $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, e+v\}$ *i konstanta h sa osobinom*

$$\lambda(x) + \sum_{y \propto x} \lambda(xy) = h \text{ za svaki čvor } x \in V.$$

Drugim rečima graf $G=(E,V)$ je magičan po čvorovima ako se čvorovi i grane mogu numerisati brojevima od 1 do $e+v$, tako da važi da je zbir težine čvora i svih grana koje polaze iz tog čvora konstantan za svaki čvor grafa G. Kako bismo ilustrovali ovu, na prvi pogled nezgrapnu definiciju, navodimo nekoliko primera (slika 1).



Slika 1.

Figure 1.

Definicija 2. *Neka je* $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, e+v\}$ *jedno po čvorovima magično označavanje grafa G sa konstantom h. Neka je* $s_v = \sum_x \lambda(x)$, *a* $s_e = \sum_{x \propto y} \lambda(xy)$. *Bijekcija* $\lambda' : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, e+v\}$ *data sa* $\lambda'(x) = (v+e+1) - \lambda(x)$ *i* $\lambda'(xy) = (v+e+1) - \lambda(xy)$ *zove se* ***dual od*** λ.

Ispitivanje magičnosti

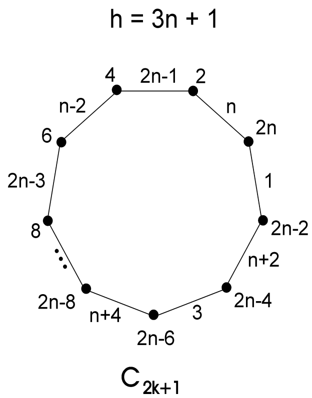
U ovom delu navodimo naše rezultate proučavanja magičnosti po čvorovima za konture, puteve, točkove, kao i još neke osobine vezane za magične grafove, kroz niz teorema. Sa $a_1, a_2, \ldots, a_v$ označeni su brojevi dodeljeni pri numeraciji čvorovima grafa, a sa $b_1, b_2, \ldots, b_e$ brojevi dodeljeni granama.

Konture C_n

Teorema 1. *C_n je po čvorovima magičan za sve $n \geq 3$.*

Dokaz. Problem se svodi na magično po granama označavanje konture C_n koje postoji za svako n. Neka je λ' magična po granama, a λ magična po čvorovima numeracija konture C_n. Uzmimo da je $\lambda(x_i) = \lambda'(x_i x_{i+1})$ i $\lambda(x_i x_{i+1}) = \lambda'(x_{i+1})$. Na ovaj način dobijamo magično po čvorovima označavanje konture C_n.

Navodimo još i primer numeracije za opšti slučaj za neparan broj čvorova, gde je h=3n+1. Čvorovima i granama pridružujemo brojeve $\{1, 2, \ldots 2n\}$. Čvorovima dodeljujemo parne brojeve, a granama neparne kao na slici 2. Jasno je da je na taj način svaki od brojeva dodeljen tačno jednom, čime je zadovoljen uslov da dato preslikavanje bude bijekcija. Za parno n neposredno rešenje se dobija na nešto komplikovaniji način razmatranjem više slučajeva.



Slika 2.

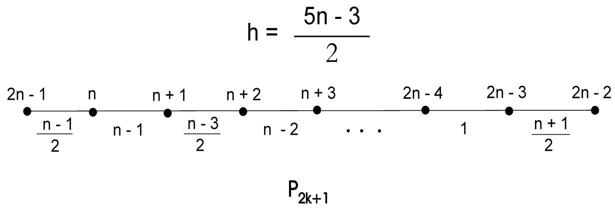
Figure 2.

Putevi P_n

Teorema 2. *P_n je po čvorovima magičan za sve n.*

Dokaz. Posmatrajmo konturu $C_n - e$, gde težina grane e iznosi 1. Numerišimo grane konture tako da je $\lambda(x_i) = \lambda(x_i) - 1$. Na taj način smo dobili magično po čvorovima označen put P_n.

Navodimo još i numeraciju puta P_n za neparno n u opštem slučaju, za $h = 5n - 3$ (slika 3). Čvorovima i granama pridružujemo brojeve $\{1, 2, \ldots 2n-1\}$. Granama dodeljujemo vrednosti od 1 do $n-1$, a čvorovima od n do $2n-1$. Svi brojevi od n do $2n-1$ su dodeljeni tačno po jednom svakom od čvorova, "neparnim" granama su dodeljeni brojevi od 1 do $\frac{n-1}{2}$, a "parnim" granama brojevi od $\frac{n-1}{2}$ do $n-1$, dakle svaki



Slika 3.

Figure 3.

od brojeva je dodeljen tačno jednoj grani odnosno čvoru. Za paran broj čvorova neposredno rešenje je moguće dobiti, ali je dosta komplikovanije jer postoji mnogo slučajeva, a princip je isti kao i za neparne.

Točkovi W_n

Teorema 3. *W_n je magičan po čvorovima za $n \in \{3, 4, 5, \ldots, 11\}$.*

Dokaz. Kao dokaz navodimo po jedan primer za svaki od točkova (W_3-W_{11} – slika 4).

Još neke osobine po čvorovima magičnih grafova

Teorema 4. *Ako su G i H grafovi sa istim brojem čvorova takvi da je $G \cup H$ po čvorovima magičan, onda je i $G \nabla H$ po čvorovima magičan ($G \nabla H$ se dobija kada se svaki čvor iz G poveže sa svakim čvorom iz H).*

Dokaz. Neka je v broj čvorova grafa G odnosno H, a e_1 i e_2 broj grana grafa G odnosno H. Brojevi koje dodeljujemo granama i čvorovima grafa $G \cup H$ su $\{1, 2, \ldots, 2v + e_1 + e_2\}$, a one koje pridružujemo čvorovima grafa $G \nabla H$ su $\{1, 2, \ldots, 2v + e_1 + e_2 + v^2\}$. Dokazaćemo da možemo numerisati graf $G \nabla H$ ne menjajući već numerisane čvorove i grane tog grafa (pri numeraciji grafa $G \cup H$), tj. da brojeve od $2v + e_1 + e_2 + 1$ do $2v + e_1 + e_2 + v^2$ možemo rasporediti na dodatih v^2 grana tako da graf $G \nabla H$ bude magičan po čvorovima. Označimo niz brojeva od $2v + e_1 + e_2 + 1$ do $2v + e_1 + e_2 + v^2$ sa c_n. Razmatraćemo sledeće slučajeve:

1. $v = 4k$

Podelimo niz c_v na dva dela. Uzmimo po $\frac{v}{4}$ prvih i poslednjih brojeva od svakog dela niza c_v. Njihov zbir je $(2v + e_1 + e_2)\, v + (v^2 + 1)\, \frac{v}{2}$. Ponavljajući postupak odabiramo po v brojeva koje dodeljujemo granama koje izlaze iz jednog čvora. Očevidno je da su svi zbirovi dobijeni datim postupkom jednaki, što znači da su uslovi za magičnost zadovoljeni za

Slika 4 (naspramna strana).

Figure 4. (opposite page).

čvorove grafa G. Potrebno je još dokazati da se može napraviti takva permutacija brojeva izabranih za jedan čvor tako da uslovi budu zadovoljeni i za čvorove grafa H. Neka je $b_{i,j}$ težina grane koja spaja čvor i sa čvorom j. U svaki čvor iz H ulazi tačno po jedna grana iz svakog od čvorova iz G, tj. tačno jedan broj iz svake v-torke brojeva. Tako jednom od čvorova pridružimo v-torku $(b_{1,v+2}, b_{2,1}, b_{4,3} \ldots, b_{k,k-1}\ b_{k+1,v+1-(k-1)}, \ldots, b_{v,v-1})$. Ponavljajući postupak "prvi-poslednji" dobijamo numeraciju grafa $G\nabla H$ koja zadovoljava uslove magičnosti.

2. $v = 4k + 2$

Podelimo niz c_v na $2k + 1$ delova. Postupajući analogno prethodnom primeru dobijamo numeraciju grafa $G\nabla H$ koja zadovoljava uslove magičnosti.

3. $v = 2k + 1$

Podelimo niz na v delova i postupamo slično kao u slučaju 1. Na taj način dobijamo magičnu numeraciju grafa $G\nabla H$, čime smo pokazali da je tvrđenje zadatka tačno.

Teorema 5. *Dual λ' je po čvorovima magično označavanje akko je G regularan graf.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je G regularan graf. Dokazaćemo da je dual λ' po čvorovima magičan. Posmatrajmo proizvoljan čvor a_i i grane $b_1, b_2, \ldots, b_s$ koje polaze iz njega. Tada važi: $a_i + b_1 + b_2 + \ldots + b_s = h$. U dualu λ' uočeni čvor ima vrednost $e + v + 1 - a_i$, a grane imaju vrednosti $e + v + 1 - b_1$, $e + v + 1 - b_2$, $\ldots$, $e + v + 1 - b_s$. Tada važi: $h' = (e + v + 1)(s + 1) - h$. Kako je graf regularan, to je s jednako za svaki čvor, pa je i h' konstantno za svaki čvor duala, što znači da je i dual po čvorovima magičan.

($\Rightarrow$) Neka je λ' po čvorovima magičan graf. Dokazaćemo da tada G mora biti regularan. Pretpostavimo suprotno, da graf G nije regularan. Neka su a_1 i a_2 dva susedna čvora grafa G, b_1 grana koja ih povezuje, $b_1, b_2, \ldots, b_s$ grane koje polaze iz a_1, a $b_1, b'_2, \ldots, b'_p$ grane koje polaze iz a_2. Tada važi: $a_i + b_1 + b_2 + \ldots + b_s = a_i + b_1 + b'_2 + b'_3 + \ldots + b'_p = h$. U dualu λ' važi: $h' = (e + v + 1)(s + 1) - h$ (za čvor 1), odnosno $h' = (e + v + 1)(p + 1) - h$ (za čvor 2). To znači da nije zadovoljen uslov magičnosti po granama za dual λ'. Kontradikcija.

Navodimo i nekoliko nejednakosti koje važe za po čvorovima magične grafove, koje se dosta jednostavno dokazuju, te dokaze prepuštamo čitaocu.

Teorema 6. *Za svaki graf G koji ima po čvorovima magično označavanje važi* $s_v + 2s_e = vh = s_e + \binom{v+e+1}{2}$, *gde su* s_v *i* s_e *zbirovi težina svih čvorova odnosno grana.*

Teorema 7. *Za svaki graf G koji ima po čvorovima magično označavanje važi* $\binom{v+e+1}{2} + \binom{e+1}{2} \le vh \le 2\binom{v+e+1}{2} - \binom{v+1}{2}$.

Teorema 8. *Za kompletan bupartitan graf* $K_{m,m}$ *koji ima po čvorovima magično označavanje sa konstantom h važi:*
$\frac{1}{2}((m+1)^3 - m^2) \le h \le \frac{1}{2}((m+1)^3 + m^2)$.

Program za pronalaženje magične numeracije grafa

Program koji smo napisali za pronalaženje po čvorovima magične numeracije grafa radi po sledećem principu: učita graf u matricu a dimenzija $v \times v$, pri čemu brojevi na glavnoj dijagonali predstavljaju težine čvorova, te su pri unošenju 1, dok je $a_{i,j}$ težina grane između čvorova i i j i pri unošenju je 0. Potom se elementima grafa dodeljuju brojevi od 1 do $e+v$ i metodom *backtrack*-a se traže sva moguća magična označavanja grafa. Matrica m pamti permutacije brojeva od 1 do $e+v$. Brojevi koji su upotrebljeni, i koji više ne mogu biti ubačeni u matricu m, upisuju se u skup s. Procedura *magicgraph* pravi permutacije brojeva od 1 do $e+v$ koji ne pripadaju skupu s tako da zbir brojeva u svakoj vrsti bude jednak h. Ovde navodimo proceduru *magicgraph*:

```
procedure magicgraph(h,i,j:integer; s:skup; sum,u:integer);
  var k,bi,bj:integer;
  begin
    if i=v+1 then
      begin
        writeln;
        for bi:=1 to v do
          begin
            writeln;
            for bj:=1 to v do write(m[bi,bj],' ');
          end;
        writeln(f);
        for bi:=1 to v do
          begin
            writeln(f);
            for bj:=1 to v do write(f,m[bi,bj],' ');
          end;
        inc(res);
      end;
    if u=0 then magicgraph(h,i+1,i+1,s,prvih(i),uk[i+1]- popun(i+1))
      else
        if a[i,j]0 then
          begin
            if (j=v) or (u=1) then
              begin
                z:=h-sum;
                if (z0) and (z) then
```

```
                if (z0) and (z) then
                  if not (z in s) then
                    begin
                      m[i,j]:=z;
                      m[j,i]:=m[i,j];
                      magicgraph(h,i+1,i+1,s+[m[i,j]],prvih(i),
                        uk[i+1]-popun(i+1));
                    end;
              end
            else
              begin
                z:=h-sum-(e+v)*(u-1);
                if z0 then z:=1;
                for k:=z to e+v do
                  if not (k in s) then
                    begin
                      m[i,j]:=k;
                      m[j,i]:=k;
                      magicgraph(h,i,j+1,s+[k],sum+k,u-1);
                    end;
               end
          end
        else magicgraph(h,i,j+1,s,sum,u)
end;
```

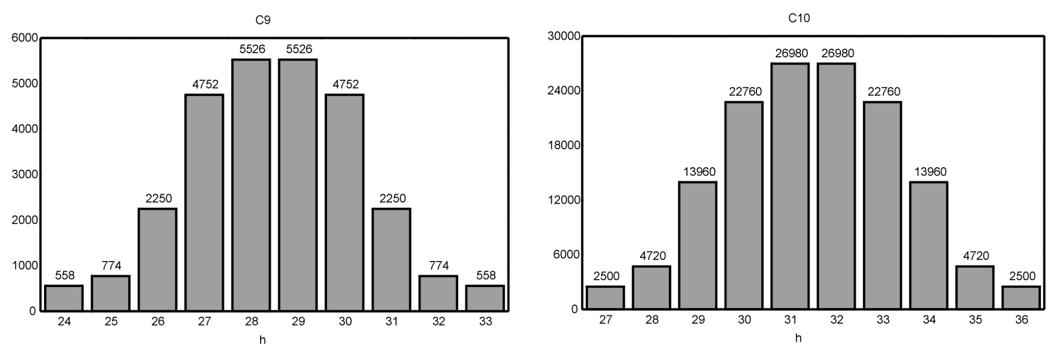
Spektri rešenja za različite *h*

Razmatranjem odnosa broja rešenja u zavisnosti od konstante h (uzimamo sve moguće vrednosti za konstantu h, koje dobijamo trivijalnim računom iz uslova magičnosti) došli smo do sledećih rezultata:

1. kod **puteva** spektri su slični, broj rešenja raste do neke vrednosti, a dalje sa porastom h broj rešenja opada, sve do maksimalne vrednosti h gde uzima vrednost 0;

2. kod **točkova** nije uočena nikakva pravilnost u promeni broja rešenja;

3. kod **kontura** uočeno je da su spektri simetrični (C9 i C10 – slika 5), odnosno broj rešenja za $\max(h)-i$ jednak je broju rešenja za $\min(h)-i$ za svako $i \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{\max(h)-\min(h)}{2}\right\}$. To je posledica činjenice da su konstante $\max(h)-i$ duali rešenja za konstante $\min(h)+i$.



Slika 5.

Figure 5.

Zaključak

Ispitivanjem magičnosti grafova ustanovili smo da su svi putevi i sve konture magični po čvorovima, kao i neki točkovi. Poznato je da svi ostali točkovi (koji nisu spomenuti u ovom radu) nisu magični po čvorovima, što se smatra kompleksnim problemom u ovoj oblasti i što mi nismo uspeli da dokažemo. Pravilnost promene broja rešenja u zavisnosti od konstante magičnosti h uočena je kod kontura. To je posledica činjenice da je dual konture takođe po čvorovima magično označavanje grafa.

Istraživanje se može proširiti na ispitivanje magičnosti po čvorovima za neke druge vrste grafova, kao i na ispitivanje magičnosti po granama i totalne magičnosti (magičnost i po čvorovima i po granama).

Takođe, moglo bi se pokušati sa rešavanjem do sada nerešenih problema, kojih ima dosta u još neispitanoj oblasti magičnih grafova.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se profesoru Draganu Mašuloviću, Tatjani Petrov i Radu Stanojeviću, koji su svojim predlozima i sugestijama doprineli da ovaj rad bude kvalitetniji.

Literatura

Petrović V. 1998. *Teorija grafova*. Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet

Wallis W. D. 2001. *Magic Graphs*. Boston: Birkhauser

Biljana Bajić, Ivan Stanimirović and Tijana Kovačević

Vertex Magic Graph Analysing

We say that a graph G with vertex set V with v elements and egde set E with e elements is *vertex magic* if there is an assignment of numbers (called *weights*) from the set to edges and vertices of G in such a way that for each vertex x the sum of the weigth of x and the weigths of all the edges incident to x is constant. Magic graphs have many applications, mainly in network-related areas and the study of radar pulse codes. In this paper we studied magic labelings of paths, circuits and wheels. Most examples shown here were found by a computer program we made. We present here proofs of some basic properties of magic graphs, followed by an analysis of the number of magic labellings as a function of the magic constant h.