Đorđe Nijemčević i Jelena Uzunović

Fraktalna difuzija

U ovom radu proučava se brzina difuzije na jednostavnim drvolikim fraktalnim strukturama. Za opis pomenutog procesa uvodi se veličina nazvana koeficijent fraktalne difuzije. Napravljen je delimično pojednostavljen matematički model prirodnog procesa i urađena je računarska simulacija difuzije kroz jednostavne samoslične drvo-objekte. Dobijeni su rezultati za vrednost koeficijenta fraktalne difuzije u zavisnosti od relevantnih parametara u skladu sa pretpostavkama.

Uvod

Difuzija u fizici predstavlja proces izjednačavanja koncentracija sistema, prouzrokovan haotičnim kretanjem atoma i molekula supstanci koje sačinjavaju taj sistem. Fraktali (lat. *fractus*=slomljen, podeljen) predstavljaju klasu geometrijskih objekata koji se odlikuju samosličnošću. Pod samosličnim objektima podrazumevaju se oni čija je svaka komponenta istog oblika kao celina, samo različitih dimenzija, pa se evolucija fraktala može produžiti do u beskonačnost, tako da svaki deo svakog dela izgleda kao ceo objekat. Primeri fraktala u prirodi su pahuljica snega ili drvo, koje ima približno fraktalan oblik, pošto se stablo deli na manje ogranke koji se kasnije dele na još manje grane, što se analogno nastavlja, tako da je da svakom nivou dobijeni oblik samo manja verzija originala.

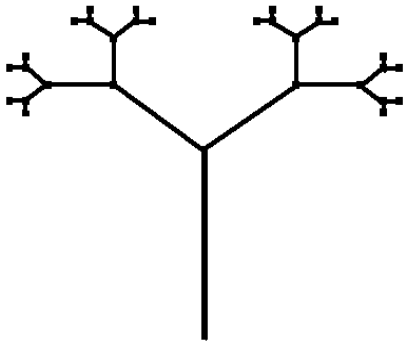
Postavlja se pitajne: kojom brzinom materija difunduje? Brzine difuzija na jednodimenzionalnim, dvodimenzionalnim i trodimenzionalnim objektima moguće je eksperimentalno odrediti. Šta se, međutim, dešava sa fraktalima, strukturama čiji se broj dimenzija ne može okarakterisati celim brojem? To je pitanje na koje ovo istraživanje pokušava da da odgovor.

Đorđe Nijemčević (1981), Kragujevac, Bunjevačka 9, učenik 3. razreda Prve kragujevačke gimnazije

Jelena Uzunović (1982), Valjevo, Dušanova 103, učenica 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Model i implementacija

Istraživanje se sastoji u računarskoj simulaciji difuzije kroz jednostavne drvo-strukture, koje su karakterisane odnosom dužina grana susednih generacija (*koga ćemo zvati faktor fraktala*), uglom između grana sa istim roditeljem (*ugla fraktala*) i brojem generacija, odnosno dubinom. Primer drveta sa faktorom 0.5, uglom $\pi / 2$ i dubinom 4 dat je na slici 1.



Slika 1. Primer drvo-fraktala.

Figure 1. An example of tree-fractal.

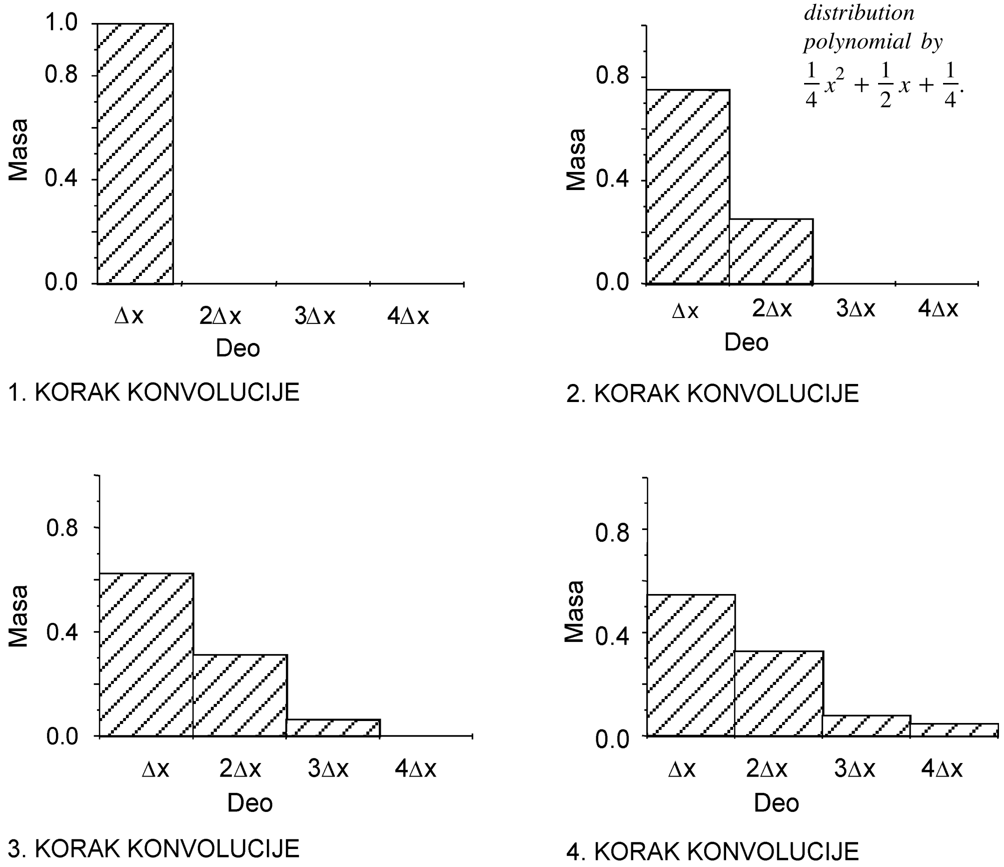
Neka je $<r>$ srednje rastojanje koje pređu čestice koje difunduju od centra difuzije, tj. mesta gde je ona počela. U opštem slučaju, zavisnost $<r>$ od vremena je stepena funkcija, tj. važi formula $<r> = a\, t^{\alpha}$, gde je a konstanta, t vreme, a α veličina koja karakteriše brzinu difuzije, a koja će biti nazvana *koeficijentom fraktalne difuzije*.

Ukoliko neku strukturu podelimo na n komplementarnih delova, tako da je deo i od "centra difuzije", tj. mesta gde je difuzija otpočela, udaljen za r_i, onda se $<r>$ računa po formuli

$$<r> = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\, r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (1)$$

Za računanje $<r>$ u drvo-strukturi neophodno je, dakle, odrediti raspored masa u njoj. Za rešenje tog problema neophodno je odrediti masenu raspodelu u cevi zatvorenoj na jednom kraju. To se postiže sukcesivnom konvolucijom, tj. uzastopnim množenjem polinoma masene raspodele i polinoma raspodele brzina.

Neka je cev poprečno podeljena na N paralelnih delića debljine. Masena raspodela može se predstaviti u obliku polinoma $P(x)$ N–1-og stepena u kome koeficijent uz i-ti član predstavlja masu u deliću i-1. Izolujmo delić i, u kome imamo n_i čestica. Tada možemo uvesti realan broj a, $a < 1$, tako da posle određenog vremena delić napusti n_i čestica. Ukoliko je vremenski trenutak dovoljno mali, možemo smatrati da će se, ukoliko je cev horizontalno postavljena, $n_i\, a/2$ čestica iz delića i naći u deliću $i-1$, isto toliko u deliću $i+1$, a $n_i\,(1 - a/2)$ će ostati u deliću i. Tu raspodelu možemo predstaviti polinomom $g(x) = \frac{a}{2}x^2 + (1-a)\,x + \frac{a}{2}$. Tada će $Q(x) = P(x)\,g(x)$ predstavljati masenu raspodelu u cevi nakon jediničnog intervala vremena. Primer prve četiri iteracije opisanog postupka dat je na slici 2.

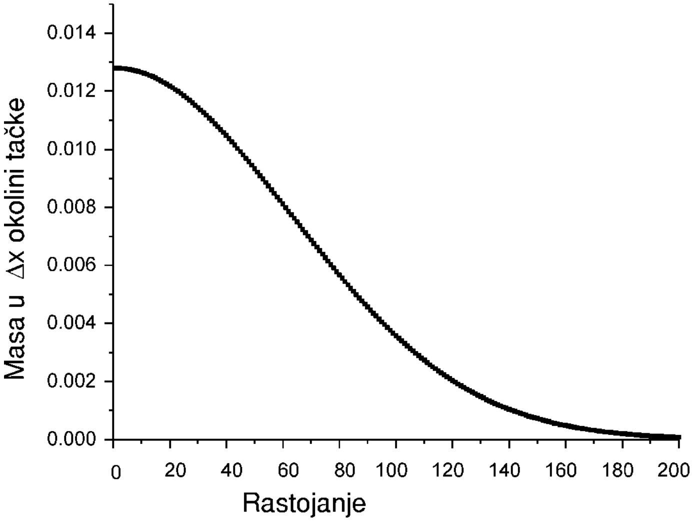


Slika 2. Primer konvolucije polinoma masene raspodele polinomomom $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Figure 2. An example of convolution of mass distribution polynomial by $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

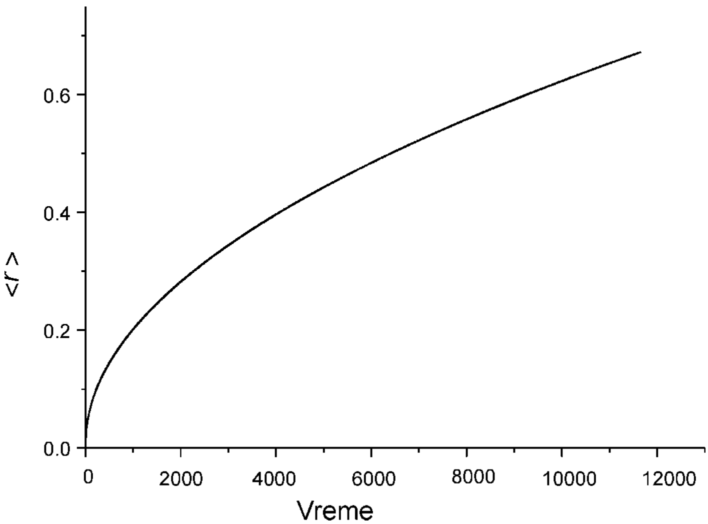
Posle velikog broja množenja može se dobiti oblik raspodele prikazane na slici 3.

Pravljenje ove raspodele ujedno predstavlja i simulaciju jednodimenzionalne difuzije. Grafik zavisnosti $\langle r \rangle$ (koje je ovde jednako srednjem pređenom putu, jer je u pitanju cev), od vremena dat je na slici 4, za cev beskonačne dužine.



Slika 3.
Primer zavisnosti mase u delta-okolini tačke u cevi zatvorenoj na jednom kraju od rastojanja tačke od početka cevi.

Figurev 3.
Typical dependance of delta-neighborhood mass of distance from a tree front-end.



Slika 4.
Primer zavisnosti srednjeg rastojanja koje pređu čestice koje difunduju u cevi zatvorenoj na jednom kraju od vremena

Figure 4.
Typical time dependance of average path passed by particle.

Računanje takve zavisnosti u fraktalnoj strukturi je nešto složeniji problem. Za svaku iteraciju konvolucije polinoma oko korena drveta šire se prsteni male debljine. Potrebno je, dakle, odrediti masu u delu drveta zahvaćenom pojedinačnim prstenom, što predstavlja m_i u formuli (1). Ta masa se određuje po formuli

$$M_{\text{u prstenu}} = \sum_{i=1}^{\nu} m_{\text{odsecka grane}, i} \qquad (2)$$

gde je v broj grana sa kojima se prsten seče ili ih sadrži, $m_{\text{odsecka grane}, i}$ masa u i-toj grani koju seče prsten, a koja se računa po obrascu

$$m_{\text{odsecka grane}} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{l}{\Delta x} \cdot S \qquad (3)$$

m_1 i m_2 predstavljaju mase Δx okolina preseka prstena sa granom, l je dužina odsečka grane, a S predstavlja debljinu grane, koja se računa po formuli

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{generacijagrane}} \qquad (4)$$

Ovde leži značaj pravljenja masene raspodele: ukoliko su poznate koordinate preseka prstena sa granom, jednostavno se određuje dužina drveta od tih preseka do njegovog korena, a samim tim i masa u njihovoj Δx -okolini. Masa u delu grane koja obuhvata prsten može se aproksimirati prema relaciji (3). Greška pomenute aproksimacije ne prelazi 3%. Naravno, uključene su i mogućnosti da se početak, kraj ili čitava grana nalaze u prstenu, što se fundamentalno ne razlikuje od prethodnog slučaja.

Zbog konačnosti samog modela drvata (što sa cevi nije slučaj), dešava se da posle izvesnog vremena deo mase “odlazi” iz drveta, jer se javljaju čestice čije rastojanje od početka cevi prevazilazi dužinu drveta. Simulacija se prekida kada ova masa dostigne 2% inicijalne mase. Ovde je prisutna izvesna proizvoljnost, ali je analizom dobijenih rezultata utvrđeno da je za manje kritične vrednosti masa na krajevima drveta veoma mala, tako da ne utiče preterano na rezultate.

Rezultati

Zavisnost $\langle r \rangle$ od vremena računata je za različite vrednosti uglova i različite odnose grana susedne generacije. Ispostavilo se da je pomenuta zavisnost zaista oblika $\langle r \rangle = a\, t^{\alpha}$. U tabeli 1 date su vrednosti koeficijenta fraktalne difuzije α u zavisnosti od pomenutih parametara. Broj generacija na drvetu je bio 6.

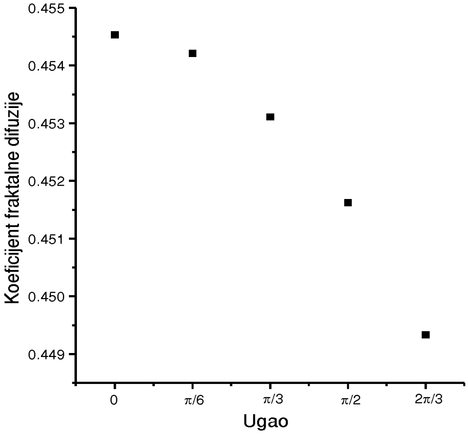
Uočava se da relativna greška dobijenih rezultata za koeficijent fraktalne difuzije ni u jednom slučaju nije veća od 0.12%.

Primetimo da se dobijeni koeficijenti mnogu primeniti i na nešto složenije strukture: ukoliko u korenu fraktala postavimo, simetrično u odnosu na neku osu, određeni broj identičnih fraktala, dobićemo iste koeficijente, naravno, pod uslovom da među nikoja dva fraktala ne postoji presecanje.

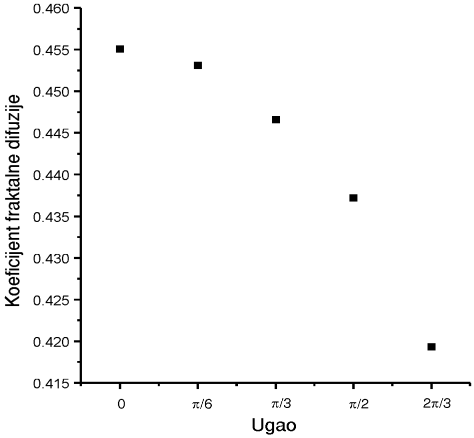
Neki rezultati iz tabele 1 prikazani su na slici 5.

Tabela 1. Koeficijent fraktalne difuzije u zavisnosti od ugla između grana i odnosa dužina grana susednih generacija

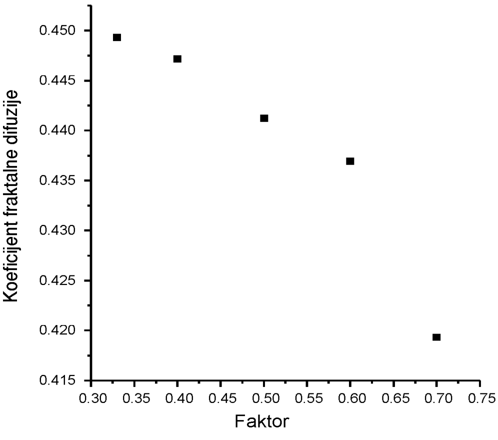
Ugao	Faktor				
	0.33	0.4	0.5	0.6	0.7
0	0.4544 ± 0.0005	0.4544 ± 0.0005	0.4544 ± 0.0005	0.4544 ± 0.0004	0.4544 ± 0.0004
$\pi / 6$	0.4542 ± 0.0005	0.4539 ± 0.0005	0.4535 ± 0.0005	0.4508 ± 0.0005	0.4531 ± 0.0004
$\pi / 3$	0.4531 ± 0.0005	0.4529 ± 0.0005	0.4516 ± 0.0004	0.4492 ± 0.0004	0.4466 ± 0.0004
$\pi / 2$	0.4516 ± 0.0004	0.4499 ± 0.0004	0.4468 ± 0.0004	0.4414 ± 0.0004	0.4372 ± 0.0004
$2\pi / 3$	0.4493 ± 0.0005	0.4471 ± 0.0005	0.4412 ± 0.0005	0.4369 ± 0.0005	0.4193 ± 0.0005



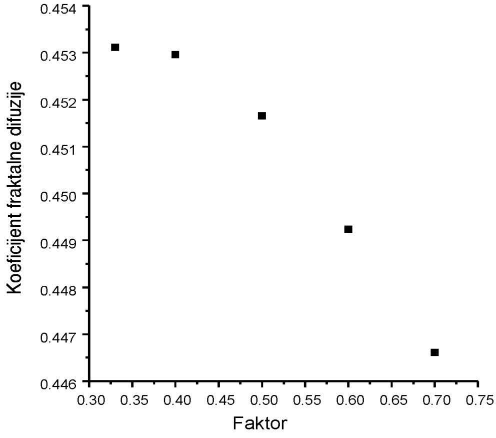
A. Faktor fraktala 0.33



B. Faktor fraktala 0.7



C. Ugao $2\pi/3$



D. Ugao $\pi/3$

Na fraktalima istih faktora uočavamo da koeficijent fraktalne difuzije opada s uglom. Takođe se uočava da kod fraktala istih uglova koeficijent fraktalne difuzije opada sa njihovim faktorom.

Slika 5 (prethodna strana).
Grafici vrednosti koeficijenata fraktalne difuzije u zavisnosti od parametara fraktala.

Figure 5 (pervious page).
Coefficients of fractal diffusion in function of fractal parameters.

Zaključak

Novouvedena vrednost, koeficijent fraktalne difuzije, uspešno je primenjena za opisivanje procesa difuzije na drvolikim objektima, čija se dimenzija ne može okarakterisati celim brojem. Dobijene su vrednosti koje sa visokom pouzdanošću govore o proučavanoj pojavi. Dalja smernica moglo bi biti računanje koeficijenta fraktalne difuzije za složenije fraktalne strukture, kao i njegovo povezivanje sa Hauzdorfovom fraktalnom dimenzijom objekta, što je za model drveta bilo neizvodljivo. Takođe bi bilo interesantno ispitati difuziju na drvo-fraktalima čiji parametri nisu konzistentni (tj. menjaju se po slučajnom principu) na svim njihovim delovima, što bi čitavi model približilo realnoj situaciji.

Đorđe Nijemčević and Jelena Uzunović

The Fractal Diffusion

The aim of the research was to find the speed of diffusion on simple binary tree-like fractals, which were determined by the ratio of parent and children branch length, and the angle between branches with the same parent. For that purpose, the computer simulation was made. The mean particle distance from the place where diffusion started (named $\langle r \rangle$) was calculated along with time (t). It was shown that the form of the dependence was $\langle r \rangle = a\, t^{\alpha}$, where a is the constant, and α is the unit called *the quotient of fractal diffusion*.

If the object we're exploring diffusion on is divided in n little complementary parts (so we can assume the mass – distribution in each part as uniform), the $\langle r \rangle$ is calculated as

$$\langle r \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

where m_i is the mass in the part i, whose distance from the place where diffusion started is r_i.

The distribution of mass, needed for the upper formula, was calculated by the method of succsessive convolution of polynomial that represents the mass distribution, and the one that represents the particle – velocity distribution in each part.

The results show that the quotient of fractal diffusion decreases along with the ratio of parent and children branch length, as well as along with the angle between the same – parent branches.