*Zdravko Pantić i Laslo Ujvari*

# Određivanje gravitacionog ubrzanja pomoću vremenske konstante pražnjenja kondenzatora

*Opisana je i testirana metoda za određivanje gravitacionog ubrzanja Zemlje koristi slobodan pad tela, u kojoj se vreme padanja tela određuje preko vremenske konstante RC kola. Dobijena vrednost ubrzanja je $g = 9.7 \pm 0.3$ m/s$^2$.*

## Uvod

Zemljino gravitaciono ubrzanje je konstantno na istim geografskim širinama i iznosi $g = \gamma \frac{M}{R^2}$, gde je $M$ masa Zemlje, a $R$ rastojanje između centra zemlje i tela. Međutim, pošto Zemlja nije pravilnog sfernog oblika, na različitim geografskim širinama razlikuju se i vrednosti gravitacionog ubrznja. Tako na primer, na ekvatoru gravitaciono ubrzanje iznosi $g$ = 9.78 ms$^{-2}$, dok je na 42° geografske širine i na polovima $g$ jednako 9.80 ms$^{-2}$ i 9.83 ms$^{-2}$, respektivno.

Postoje mnoge metode kojima se može meriti ubrzanje Zemljine teže (interferometrijske, pomoću fizičkog klatna, slobodnog pada...). One se međusobno razlikuju po tačnosti i preciznosti, kao i po ceni uređaja potrebnih za izvođenje merenja.

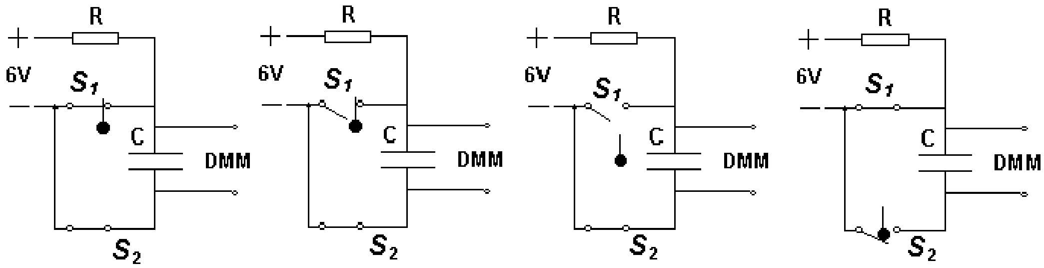
Metoda koja je ovde korišćena za određivanje gravitacionog ubrzanja Zemlje koristi slobodan pad tela, s tim što se vreme padanja određuje preko vremenske konstante RC kola. Iz relacije za pređeni put pri slobodnom padu tela $h = \frac{1}{2} g t^2$ određuje se vrednost ubrzanja $g$.

## Skica i teorijske osnove eksperimenta

Prilikom izvođenja merenja telo, u našem slučaju kuglica, čini prekidač $S_1$ (slika 1). Drugi prekidač $S_2$ se sastoji od plastične čaše pričvršćene za čeličnu žicu i magneta (slika 2).

*Zdravko Pantić (1983), Loznica, Slobodana Penezića 16/10, učenik 1. razreda Gimnazije "Vuk Karadžić" u Loznici*

*Laslo Ujvari (1983), Zrenjanin, Pere Segedinca 26, učenik 2. razreda Elektrotehničke i građevinske škole "Nikola Tesla" u Zrenjaninu*




*Slika 1. Princip eksperimenta.*

*Figure 1. Cheme of the principle of the experimet.*

Kada kuglica počne da pada, tj. kada se otvori prvi prekidač, kondanzator se puni sve dok kuglica ne dosegne dno plastične čaše i udarcem otvori kontakt između čelične žice i magneta (tj. dok ne otvori drugi prekidač). Pomoću digitalnog multimetra očitavamo maksimalnu vrednost napona na kondenzatoru.

Analizirajmo, sada ovo RC kolo. Struja kroz kolo je:

$$i = \frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t}$$

a ulazni napon iznosi:

$$V_{\mathrm{o}}\, iR + q/C$$

Zamenom prve jednačine u drugu dobijamo:

$$V_{\mathrm{o}} = \frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t} + q/C$$

Daljim rešavanjem jednačine se dobija

$$V_{\mathrm{o}} - q/C = R\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t}$$

odakle sledi da je

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\,q}{V_{\mathrm{o}} - q/C} R\, i$$

odnosno

$$\mathrm{d}t = R\,C\frac{\mathrm{d}\,q}{V_{\mathrm{o}}\,C - q}$$

Sada se uvodi smena. Umesto $V_{\mathrm{o}}\,C - q$ pišemo $v$, pa uzimajući u obzir da tad važi i $\mathrm{d}v = -\,\mathrm{d}q$, obijamo:

$$\int_{\mathrm{o}}^{t} \mathrm{d}t = R\,C\int_{\mathrm{o}}^{q(t)} \frac{-\,\mathrm{d}v}{v}$$

što daljim rešavanjem daje

$$-\frac{t}{R\,C} = \ln\left(1 - \frac{q(t)}{V_{\mathrm{o}}C}\right)$$

Ova poslednja jednačina se može napisati kao:

$$\exp\left(\frac{-t}{R\,C}\right) = 1 - \frac{q(t)}{V_0 C}$$

odakle se dobija

$$\frac{q(t)}{C} = V_0\,[1 - \exp(-t/RC)]$$

Leva strana jednakosti predstavlja izraz za napon na kondenzatoru u funkciji vremena. Imajući to u vidu, logaritmovanjem obeju strana i sređivanjem jednačine dobija se izraz za vreme $t$ u funkciji napona na kondenzatoru:

$$t = RC \ln(1 - \frac{V}{V_0}) \qquad (1)$$

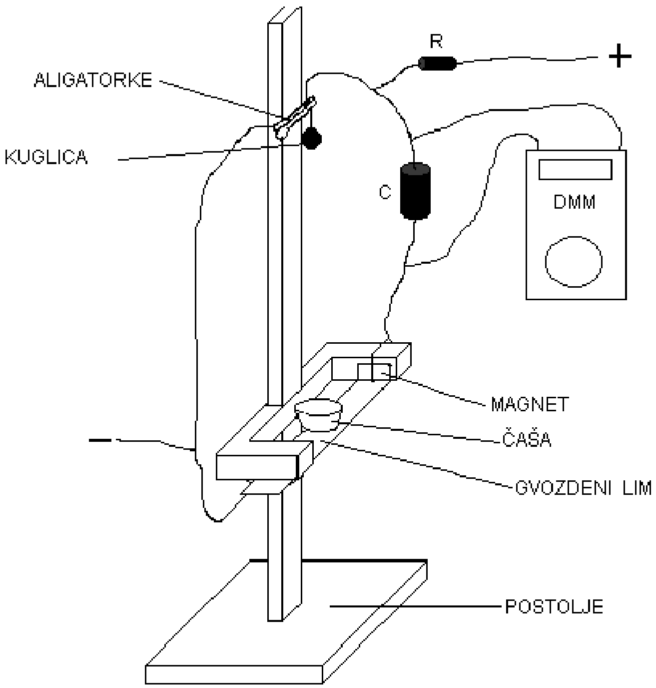
gde je $V_0$ ulazni napon koji je u našem slučaju iznosio 6 V.

## Aparatura

Shema aparature data je na slici 2. Prilikom izvođenja eksperimenta korišćeni su:

– otpornik od 9.1 MΩ

– kondenzator kapaciteta 1 μF




*Slika 2. Aparatura.*

*Figure 2. Instrumental setup.*

– postolje sa zalepljenom metarskom trakom (tako da se visina sa koje telo pada mogla odmah očitavati)
– kontakti sa izolacijom
– kuglica
– digitalni multimetar
– računar
– plastična čaša
– magnet
– čelična žica
– lepljiva traka
– limeni držači

## Određivanje vremenske konstante

Da bismo odredili vreme padanja tela ($t$) potrebna nam je vrednost vremenske (RC) konstante (1). Njena teorijska vrednost za korišćeno kolo je $\tau = RC = 9.1$ M$\Omega \cdot 1$ $\mu$F = 9.1 s. Međutim, pošto kondenzator i otpornik koji su korišćeni u eksperimentu imaju toleranciju do 10%, bilo je potrebno precizije odrediti vrednost RC konstante.

Ona se određuje na sledeći način. Vežemo otpornik i kondenzator paralelno i povežemo ih na digitalni multimetar (DMM). Podesimo DMM-u na kiloome i sačekamo da izađe iz svog mernog opsega. To je znak da je kondenzator napunjen. Zatim merni opseg DMM-a podesimo na volte. Pošto je unutrašnja otpornost DMM-a dok je na voltima 10 M$\Omega$, tj. istog reda veličine kao i otpornika u kolu (9.1 M$\Omega$), oni zapravo čine paralelnu vezu čija je ekvivalentna otpornost oko 5 M$\Omega$. Zbog toga je i vrednost vremenske konstante oko 5 s. Tek kada se napon na kondenzatoru spusti ispod 200 mV i kada se DMM podesi na milivolte njegova otpornost postaje 100 M$\Omega$ što je mnogo veće od otpora otpornika. Tada je moguće odrediti stvarnu vrednost vremenske konstante. Merenje se vrši u dva intervala, i to kada je napon na kondenzatoru između 2176 mV i 200 mV što daje vreme $t_1$, i između 200 mV i 0, što je vreme $t_2$. Vremenska konstanta se dobija iz obrasca:

$$RC = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \tag{2}$$

gde je $V_1$ = 2176 mV, a $V_2$ = 200 mV.

Vreme $t_1$ je mereno pomoću računara i iznosi $t_1$ = 13.67 s. Vremenski interval $t_2$ za koji se kondenzator isprazni (od 201 mV do 0) je meren štopericom. Na osnovu četiri merenja dobijeno je $t_2 = (34.3 \pm 0.3)$ s. Vrednost vremenske konstante iznosi $RC = (8.67 \pm 0.14)$ s.

## Rezultati i diskusija

Naponi na kondenzatoru su mereni na sedam različitih visina. U tabeli 1 su prikazane izmerene srednje vrednosti napona na kondenzatoru i odgovarajuće vreme padanja kuglice računato po formuli (2).

Tabela 1. Rezultati merenja

| $h$ [m] | $V$ [mV] | $t$ [s] | $t^2/2$ [$s^2$] |
|---|---|---|---|
| 0.40 | 194.0 | 0.285 | 0.041 |
| 0.37 | 186.2 | 0.273 | 0.037 |
| 0.35 | 181.3 | 0.266 | 0.035 |
| 0.33 | 176.7 | 0.259 | 0.034 |
| 0.30 | 169.5 | 0.248 | 0.031 |
| 0.27 | 160.4 | 0.234 | 0.027 |
| 0.25 | 153.2 | 0.225 | 0.025 |

Iz relacije $h = \frac{1}{2} g t^2$, proizilazi da je $\frac{t^2}{2} = k \cdot h$. Na osnovu vrednosti dobijenih za $h$ i $t^2/2$, metodom najmanjih kvadrata određujemo vrednost koeficijenta $k$, koji je jednak recipročnoj vrednosti ubrzanja $g$. Kako je $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta g}{g}$, to je greška za ubrzanje $\Delta g = g \cdot \frac{\Delta k}{k}$. Koeficijent $k$ iznosi $(0.103 \pm 0.004)\ m^{-1}s^2$, što daje konačni rezultat: $g = (9.7 \pm 0.3)\ ms^{-2}$. Pri tome koeficijent korelacije između vrednosti dobijenih merenjem i nađene prave iznosi 0.99.

Jedan od razumljivih mogućifh uticaja na grešku rezultata je otpor vazduha. Međutim, u našem slučaju sila viskoznosti računata prema Stoksovom zakonu $F_t = 6\pi\eta rv$ ($r$ – plupречnik skuglice, $\eta$ – koeficijent viskoznosti), procenjena je na $F_t \approx 0.1$ mN. Uticaj ove sile može se zanemariti, pošto rezultira promenom ubrzanja koje je za preko red veličine manje od dobijene greške za $g$.

## Literatura


MIT 1992. *Experiment: Falling objects*. Massachusetts institute of technology, Department of Physics

Raspopović M., Božin S., Danilović E.. 1996. *Fizika 2*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

Reljin B. 1992. *Teorija električnih kola 1*. Rešavanje kola u vremenskom domenu. Beograd: Nauka

*Zdravko Pantić and Laslo Ujvari*

# Measuring the Gravitational Acceleration Using the Time Constant of RC Circuit

In this project is described and tested a method for the determination of the gravitational acceleration using equations for free fall and a RC circuit. The principle of experiment is given on the Figure 1, and the experimental setup is given on Figure 2.

The goal is to measure the time of fall as a function of the distance of fall. The distance is measured directly. But to measure the rather short time, we measured the voltage developed across a capacitor which begins to be charged from a constant-voltage source when the pellet is released, and stop charging when the pellet reaches bottom point.

When the pellet begins to fall, it opens the first switch. A capacitor is charging until the pellet reaches the bottom of a plastic glass and opens the second switch. We measured maximum voltage on capacitor, an calculated time $t$ using relation:

$$t = RC\ln\left(1 - \frac{V}{V_o}\right).$$

Because of big tolerance of capacitor and resistor (about 10%) time constant must be measured more precisely.

The time constant is calculated using the formula (2) in serbian version of this paper. The capacitor was charged first. Then we measure time constant during it's discharging. The time of discharging was measured in two intervals – the first, when the voltage on the capacitor is between 2176 mV and 200 mV (time $t_1$), and the second, between 200 mV and 0 (time $t_2$). We got the result $RC = (8.67 \pm 0.14)$ s.

Time of falling of pellet was measured on seven different heights. Data were analyzed by the method of least squares. The final result of our experiment is: $g = (9.7 \pm 0.3)$ ms$^{-2}$.