Jelena Spasojević

Perkolacija na kvadratnim i trougaonim rešetkama

Određena je kritična gustina perkolacije za kvadratnu i trougaonu rešetku kao i kritični eksponenti za prvu. Dobijeno je da širina perkolacionog intervala zavisi od nivoa poverenja random generatora i dimenzija rešetke.

Uvod

Reč *perkolacija* je nastala od latinske reči *per* koja znači *kroz* i takođe latinske reči *colare* koja znači *teći*. Jedan od prvih modela perkolacije bio je Bernoulli-jev model perkolacije kroz rešetke. Reprezentacija tog modela bila bi kvadratna rešetka stranice n čija je svaka ivica dužine 1 sačinjena od provodnog ili od neprovodnog materijala pri čemu se izbor vrši slučajno, i gustina provodnog materijala je ravnomerna i jednaka p.

Ako postoji skup provodnih ivica koje povezuju donju i gornju ivicu rešetke, struja može teći kroz rešetku od jedne do druge stranice – tada kažemo da rešetka perkolira. Isto se može generalisati na rešetke veće dimenzije. Hammersley je pokazao da postoji gustina p_c takva da je za $p < p_c$ i $n \to \infty$ verovatnoća da rešetka perkolira jednaka 0, a za $p >> p_c$ i $n \to \infty$ verovatnoća je 1, dok za slučaj $p \approx p_c$ verovatnoća pripada intervalu (0,1) (Mandelbrot 1977). Samo za neke modele ovu kritičnu gustinu je moguće odrediti dok za većinu to nije slučaj. Kod Bernoulli-jeve rešetke ona je 1/2 (Schroeder 1991). Treba pomenuti da je perkolacija, na Bernoulli-jevom, kao i na modelima koji će ovde biti proučavani čisto topološki problem i da se po analogiji može posmatrati na proizvoljnom grafu G koji je povezan. Ulogu stranica kvadrata između kojih sa perkolacija posmatra mogu uzeti dva proizvoljna neprazna podskupa skupa ivica E(G) grafa G.

Većina slučajeva perkolacije na proizvoljnom grafu G je analitički nerešiva (pod analitickom rešivošću podrazumeva se mogućnost analitičkog

Jelena Spasojević (1979), Novi Beograd, Gandijeva 148/14, učenica 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

određivanja bar nekog od kritičnih parametara), zato što je svaki kritični parametar funkcija matrice povezanosti grafa koju možemo uzeti proizvoljno. Već je rečeno da se u blizini kritične gustine Bernoulli-jev model kod koga $n \to \infty$ i $p \approx p_c$ drugačije ponaša nego u ostalim slučajevima (tj. u slučajevima kada je $p < p_c$ ili $p < p_c$); tada su ,,perkolirajući domeni (odnosno domeni koji ostvaruju kontakt donje i gornje ivice rešetke) fraktalne krive čija je Hausdorff-ova dimenzija između 1 i 2 i određena je analitički (Mandelbrot 1977).

Bernoulli-jev model je matematički kao i model koji će kasnije biti pomenut, međutim oni predstavljaju uvod u probleme vezane za perkolaciju koji se pojavljuju u fizici (fazni prelazi druge vrste, odnosno feromagnetici ispod Curie-eve tačke ,,perkoliraju pri čemu je sama definicija perkolacije drugačija) (Schroeder 1991).

Model perkolacije koji ce biti proučavan dualan je Bernoulli-jevom modelu u tom smislu što su osnovne jedinice perkolacije temena grafa a ne njegove ivice. Ovaj model pokušaćemo uvesti formalnije od Bernoulli-jevog modela i to na proizvoljnom grafu.

U budućem tekstu sa G ćemo označavati proizvoljan graf koji je povezan, a sa $\mathrm{V}(G)$ i $\mathrm{E}(G)$ skupove njegovih temena i ivica respektivno.

Neka je f funkcija koja preslikava $\mathrm{V}(G)$ u N_0 (skup prirodnih brojeva uključujući i nulu) i neka je H operator koji preslikava skup svih celobrojnih funkcija čiji je domen skup $\mathrm{V}(G)$ u isti taj skup, takav da je:

$$\mathrm{H} f(X) = \begin{cases} \max\{f(Y) \mid (Y,X) \in \mathrm{E}(G)\} + 1 \text{ , za } f(X) = 1 \\ f(X) \text{ , za } f(X) \neq 1 \end{cases}$$

Neka je na početku $\{f(X) \mid X \in \mathrm{V}(G)\} \subseteq \{0,1\}$. Neka su A i B dva neprazna podskupa skupa $\mathrm{V}(G)$. Uradimo sledeće: za svako $X \in \mathrm{A}$ ako je $f(X) = 1$ biće $f(X) = f(X) + 1$. Neka je $(\forall X \in \mathrm{V(G)})$ $(f_1(X) = f(X))$. Definišimo iteraciju na sledeći način: $(\forall X \in \mathrm{V(G)})$ $(f_{i+1}(X) = \mathrm{H} f_i(X))$. Reći ćemo da i-ta iteracija počinje u vremenskom trenutku i. Ukoliko postoji takvo i da je $(\forall X \in \mathrm{V(G)})$ $(f_i(X) = f_{i+1}(X))$, kažemo da je i+1-va iteracija trivijalna, u tom slučaju biće i svaka j-ta iteracija ($j > i$) trivijalna. Ako je graf G konačan tada je broj čvorova X takvih da je $f(X) = 1$ konačan, u svakoj iteraciji koja nije trivijalna on će se smanjiti bar za 1 pa će posle konačnog broja koraka svaka iteracija postati trivijalna.

Posmatrajmo skup $\{X \mid (X \in \mathrm{V}(G)) \quad f(X) \notin \{0,1\}) \cap \mathrm{B}\}$; postoje dve mogućnosti i to da je on prazan ili neprazan; u slučaju nepraznog skupa reći ćemo da graf G *perkolira*.

Neka je G_1 podgraf grafa G takav da je pre prve iteracije $(\forall X \in \mathrm{V}(G))$ $(f(X) \neq 0)$. Graf G perkolira ako postoji povezan podgraf S grafa

G_1 takav da su skupovi A V(S) i B V(S) neprazni. Domenima ćemo zvati povezane podgrafove grafa G_1 koji su maksimalne kardinalnosti, dok ćemo perkolirajućim domenom zvati graf S.

Označimo sa $K(n, t)$ kvadratnu rešetku stranice n, koja ima t ivica. Neka je A neko svojstvo grafa $K(n, t)$ (možemo uzeti da je to baš svojstvo grafa da perkolira), funkcija A(n) je kritična funkcija za svojstvo A ako je:

$$\mathrm{Prob}(n, N(n))[\mathrm{A}] = \begin{cases} 0, \text{ za } N(n)/A(n) \to 0 \\ 1, \text{ za } N(n)/A(n) \to \infty \end{cases}$$

gde Prob(n, t)[A] označava verovatnoću da $K(n, t)$ ima svojstvo A (Erdoes, & Spencer 1974).

Dosadašnje uvođenje modela odnosilo se na proizvoljan graf G, a od sada ćemo razmatrati kvadratnu rešetku.

Pokazano je da svi parametri sistema u blizini pc stepeno zavise od veličine koja se zadaje na sledeći način

$$\varepsilon = (p - pc) \ / \ p \text{ za } p \to pc$$

Iz prethodne definicije je jasno da važi $\varepsilon \ll 1$.

Uvešćemo funkciju $Z(n, t, \varepsilon)$ koja će predstavljati broj čvorova u n-tom redu rešetke čija se vrednost u trenutku vremena t promenila podeljen sa srednjim brojem čvorova različitih od 0 po redu. Pokazano je da za $n \gg \gg 1$ i $t \gg 1$ Z predstavlja homogenu funkciju po svojim argumentima; odnosno za svako λ različito od nule važi

$$Z(n, t, \varepsilon) = Z\left(n \cdot \lambda^{a_n}, t \cdot \lambda^{a_t}, \varepsilon \cdot \lambda^{a_\varepsilon} \right) / \varepsilon$$

gde su a_n, a_t, a_ε eksponenti. Pustimo da $n \to \infty$ i $t \to \infty$, dobijamo

$$Z(\infty, \infty, \varepsilon) = Z(\infty, \infty, \varepsilon \cdot \lambda^{a_\varepsilon})/\lambda \tag{1}$$

Uzimajući da Z stepeno zavisi od ε dobijamo

$$Z(\infty, \infty, \varepsilon) = \mathrm{const} \cdot \varepsilon^{\beta}$$

I uvrštavajući to u jednačinu (1) dobijamo

$$a_e = \frac{1}{\beta}$$

(eksponent β ćemo zvati kritičnim eksponentom).

Uvedimo još dva parametra: karakterističnu dužinu ξ i karakteristično vreme ϑ. Za njih će pri $\varepsilon \to 0$ biti ispunjeno

$\xi = \text{const} \cdot \varepsilon^{\nu}$ i $\vartheta = \text{const} \cdot \varepsilon^{\delta}$.

Ove parametre smo uveli da bi Z mogli izraziti pomoću funkcije g po dve promenljive za koju važi:

$$Z(n, t, \varepsilon) = n^{x} \cdot g\,(\,n/\xi\,, t/\vartheta\,)$$

gde je $\xi = -\,\beta \,/\, \nu$, što je ispunjeno zbog toga što je Z homogena funkcija svojih promenljivih.

Označimo sa ζ karakterističan broj čvorova koji su promenili vrednost. Uzmimo da je on jednak $n^{-\beta/n}$.

Tada dobijamo

$$\frac{Z(n,t,\varepsilon)}{\zeta} = g\,(\frac{n}{\xi}, \frac{t}{\vartheta})$$

Biće još potrebno i da uvedemo funkciju $\mathbf{N}_s(t, \varepsilon) = \text{const} \cdot \cdot \Sigma_t Z(n,t,\varepsilon)$ koja predstavlja ukupan broj čvorova čija je vrednost bar jednom promenjena (ako se vrednost jednog čvora više puta menja tada promenu računamo samo jedanput), ta funkcija stepeno zavisi od vremena t sa eksponentom $(\nu - \beta) \,/\, \delta$. Eksponent se moze analitički odrediti, to je prvi uradio Peter Grassberger i utvrdjeno je da iznosi 4/3 (Schroeder 1991). (Ranije je trebalo napomenuti da je kvadratna rešetka analitički nerešiva, dok za trougaonu to nije slučaj.)

Najdalja ivica kvadratne rešetke u kojoj postoji čvor X takav da je $f(X) \notin \{0,1\}$ n-ta ivica gde je

$$n = \text{const} \cdot t^{\nu/\delta}.$$

Već je napomenuto da je perkolacija u smislu gore navedene definicije topološki problem, pa se zbog toga može očekivati da će perkolacione gustine za trougaonu i kvadratnu rešetku biti različite (kod rešetki ta gustina je funkcija topološke dimenzije rešetke i stepena svakog čvora). Stepen čvorova trougaone rešetke je 6 a kvadratne je 4 pa je za očekivati da kritična gustina kod druge bude znatno veća (pod stepenom čvora podrazumevamo broj drugih čvorova sa kojima je povezan).

Opis metode

Cilj ovog rada bio je određivanje kritičnih eksponenata za kvadratnu rešetku kao i kritične gustine za kvadratnu i trougaonu rešetku. Treba napomenuti da sam za skupove A i B kod trougaone rešetke uzimala osnovicu trougla i najmanju njoj paralelnu ivicu koja sadrži bar jedan čvor X takav da je $f(X)$ različito od nule.

Graf je zapisan kao matrica A, pri čemu važi da su čvorovi (i, j) i (k, l) povezani ako je

$$\mathrm{abs}(i - k) + \mathrm{abs}(j - l) = 1 \text{ (kod kvadratne rešetke)}$$

pri čemu je $A[i, j] = f(X)$ gde je $X = (i, j)$.

Broj svih funkcija f koje $V(G)$ preslikavaju u $\{0, 1\}$ je konačan, međutim za veliko n taj broj premašuje vremenske mogućnosti računara (zato što broj tih funkcija eksponencijalno raste sa kvadratom stranice rešetke) pa je proveru perkolira li graf na određenoj gustini nepohodno ispitati samo pomoću nekoliko grafova te gustine.

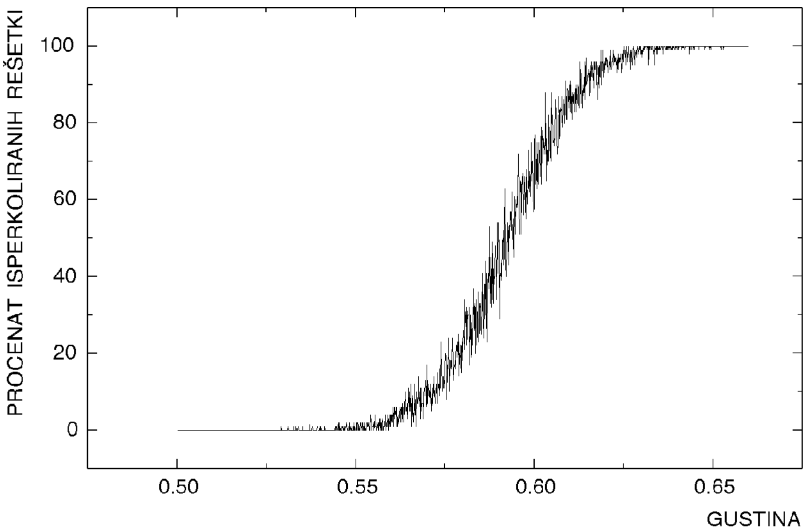
Ravnomerna gustina (naglašeno pri zasnivanju modela) ostvaruje se pomoću RANDOM generatora. Koliko će ta raspodela biti ravnomerna zavisi od nivoa poverenja generatora, koji je određen u toku pisanja programa. Inicijalizacija funkcije odnosno početnih vrednosti čvorova grafa vrši se na sledeći način: $f(X) = A[i, j] = \mathrm{trunc}(\mathrm{random} + p)$ – verovatnoća da vrednost bude 1 je p i to samo u slučaju generatora čija je raspodela ravnomerna. Ova inicijalizacija je upotrebljena zato što se pokazala kao dosta brza, iako postoje odstupanja uslovljena lošim generatorom.

Provera perkolira li graf vrši se uz pomoć programa napisanog u PASCAL-u, i provera se na određenoj gustini vrši 100 puta. Broj grafova koji su na određenoj gustini isperkolirali upisuje se u datoteku a potom dalje obrađuje u ORIGIN-u. Kod određivanja kritičnih parametara takođe se relevantne vrednosti broja čvorova upisuju u datoteke i dalje se obrađuju. Kod veličina koje se podvrgavaju stepenim zakonima korišćena je umesto obične log-log skala.

Rezultati i njihovo tumačenje

U toku rada utvrđeno je da nivo poverenja random generatora iznosi 0.45. Zbog toga se može očekivati da su devijacije od tačnih vrednosti velike.

Leva granica početka perkolacije (u smislu datom u tekstu) kod kvadratne rešetke je: 0.5541, 0.5573, 0.5616, 0.5535, 0.5593. Gustina na kojoj verovatnoća perkolacije postaje različita od nule je 0.557 ± 0.006. Desna granica perkolacije je: 0.6315, 0.6269, 0.6286, 0.6277. Gustina počev od koje verovatnoća perkolacije postaje 1 je 0.629 ± 0.003. Interval perkolacije je dužine 0.072 ± 0.009. (Poređenja radi, kod rešetke dva puta manje stranice dobio se interval širine 0.133 što je znatno šire od našeg intervala.) Kritična gustina kvadratne rešetke je 0.593 ± 0.009.

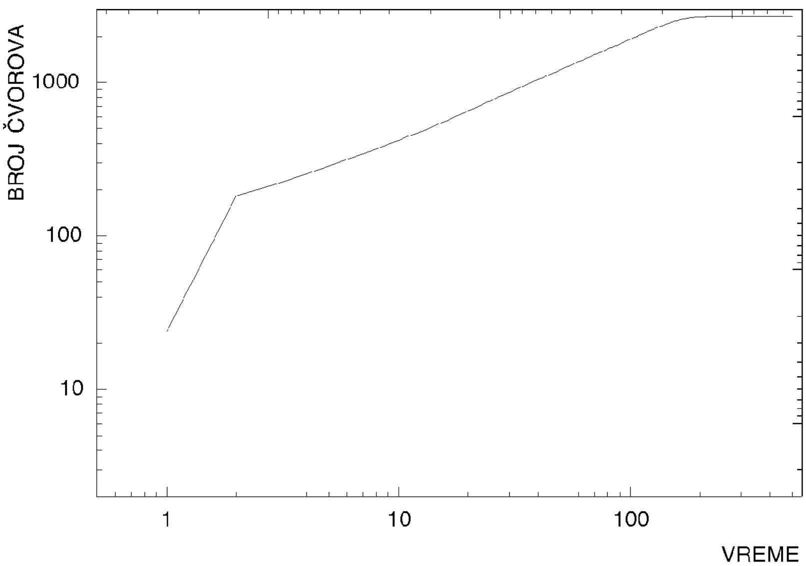


Slika 1.
Zavisnost broja isperkoliranih rešetki od gustine kod kvadratne rešetke.

Figure 1.
Number of percolate lattices depending on lattice density.

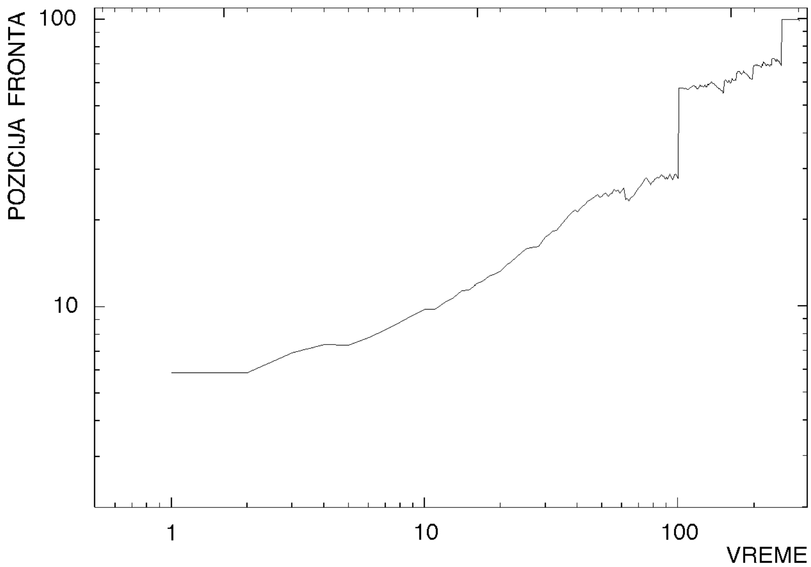
Leva granica početka perkolacije (smisao je dat u uvodu) kod trougaone rešetke je: 0.4916, 0.4568, 0.4724, 0.4819, odnosno leva granica je 0.476±0.019. Desna granica: 0.8588, 0.8494, 0.8831, 0.8754, odnosno 0.867±0.017. Dužina intervala perkolacije je 0.36±0.04 što je previše. Gustina koja je kritična je 0.671±0.036.

Pri određivanju kritičnih parametara (oni su određivani samo za kvadratnu rešetku) poželjno je da širina perkolacionog intervala bude mala, u suprotnom se pojavljuju problemi na kojoj gustini određivati vrednosti. Ovde je za tu gustinu uzimana sredina perkolacionog intervala – 0.593.



Slika 2.
Broj čvorova koji su promenili vrednost u zavisnosti od vremena.

Figure 2.
Number of sites that changed values depending on time.



*Slika 3.
Zavisnost položaja fronta čvorova od vremena.*

*Figure 3.
Percolation front position depending on time.*

Zavisnost broja čvorova koji su promenili vrednost od vremena (eksponent $(\nu-\beta)/\delta$) je: 0.4083, 0.4637, 0.4199. Podaci su dobijeni linearnim fitovanjem grafika (sl. 2). Srednja vrednost je 0.430±0.033.

Zavisnost položaja fronta čvorova koji su promenili vrednost od vremena (eksponent ν/δ): 0.6274, 0.6905, 0.6713. Podaci su dobijeni linearnim fitovanjem grafika (sl. 3). Srednja vrednost je 0.663±0.036.

Ovi parametri su određeni i na gustini 0.630 i dobijeni eksponenti su veći za 10 do 20 procenata od istih eksponenata na gustini 0.593. Odatle sledi da je za određivanje kritičnih eksponenata neophodna rešetka većih dimenzija. Takođe sam pokušala da odredim eksponent , ali grafik iz koga ga je trebalo odrediti je ispao isuviše „razvučen te sam stoga odustala.

Izvesno je da bi se sa tablom većih dimenzija mogao dobiti znatno uži perkolacioni interval, međutim u programu su korišćeni celobrijni nizovi čija je maksimalna dužina u PASCAL-u 10000 tako da bi se rezultat mogao poboljšati pisanjem programa u C-u, ili korišćenjem nečeg drugog umesto niza. Izuzetno širok interval dobijen kod trougaone rešetke može se delimično objasniti i time što je maksimalan broj čvorova koji je korišćen bio 5000, što je manje nego kod kvadratne rešetke pa je i očekivano da interval bude širiok.

Literatura

[1] Mandelbrot, B. 1977. *The Fractal Geometry of Nature*. N.York: Freeman.

[2] Schroeder, M. 1991. *Chaos, Fractals and Power Laws*. N.York: Freeman.

[3] Erdoes, P., Spencer, J. 1974. *Probablistic Methods in Combinatorics*. Budapest: Akadémiai Kiádo.

Jelena Spasojević

Percolation on Square and Triangular Lattice

In this paper the critical density for percolation on square and triangular lattice, as well as the critical exponent for percolation on square lattice, are measured in numerical experiment. The width of determined percolation interval is limited by confidence level of used random generator.