Ivana Jovanović i Vuk Gojnić

Problem dva i tri tela

Ovaj rad se bavi problemom dva i tri tela rešavajući ga numerički, primenom računara. Napravljene su simulacije kretanja tela. Za rešavanje su korišćene numeričke metode: Ojlerova, modifikovana Ojlerova i metoda Runge-Kutta. Program je iskorišćen za upoređivanje ove tri metode na osnovu testa brzine izvršavanja programa i testa tačnosti koju postiže svaka od metoda. Programi, simulacije kretanja pisani su u programskom jeziku Turbo Pascal.

Uvod

Većina procesa u fizici i u drugim prirodnim naukama opisuje se diferencijalnim jednačinama. Vrlo retko se može naći tačno „analitičko" rešenje diferencijalne jednačine, tj. rešenje u zatvorenom obliku – izraženo preko elementarnih funkcija ili eventualno preko integrala elementarnih funkcija. Nove generacije računara koji pored svojih izuzetnih računarskih sposobnosti nude i brzi grafički prikaz rezultata, omogućuju nam da probleme rešavamo numeričkim metodama.

Problem dva tela

Problem dva tela izražen je sledećim zadatkom. Dva nabeska tela se privlače međusobno po Njutnovom zakonu gravitacije:

$$F_{x_1} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_3} \cdot (x_2 - x_1), \qquad F_{x_2} = - F_{x_1} \tag{1}$$

$$F_{y_1} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_3} \cdot (y_2 - y_1), \qquad F_{y_2} = - F_{y_1} \tag{2}$$

Neka se iz zadatih početnih uslova odredi kretanje tih dvaju tela u odnosu na koordinatni sistem koji smatramo nepomičnim.

Ivana Jovanović (1978), Smederevo, ul. 16. oktobar 84/33, učenica 3. razreda Smederevske gimnazije

Vuk Gojnić (1979), Podgorica, Mitra Bakića 50, učenik 3. razreda Gimnazije „Slobodan Škerović" u Podgorici

Ojlerova metoda

Ojlerova metoda pripada numeričkim metodama i izračunava približnu vrednost funkcije $y(x)$. Razmatra se diferencijalna jednačina $y' = f(x, y)$ sa početnim uslovom $y(x_0) = y_0$. Bira se mali interval h i konstruiše sistem međusobno jednako udaljenih tačaka $x_i = x_0 + i\,h$, ($i =$ $= 0, 1, 2, 3$). Ojlerova metoda približne vrednosti $y(x_i) \approx y_i$ računa pomoću formule:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)\ ,\quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Primenjena na problem dva tela ova metoda smatra da je za jedan vremenski interval $\mathrm{d}\,t$ brzina konstantna (V = const.) pa se kretanje u tom intervalu smatra ravnomernim, tako da važe jednačine:

$$x_{n+1} = x_n + V_{x_n}\mathrm{d}\,t \tag{3}$$

$$y_{n+1} = y_n + V_{y_n}\mathrm{d}\,t \tag{4}$$

Nakon svakog intervala dt računa se sila (po Njutnovom zakonu) i brzine za nove položaje po formuli:

$$V_{x_{n+1}} = V_{x_n} + \frac{F_{x_n}\mathrm{d}\,t}{m}\,, \tag{5}$$

$$V_{y_{n+1}} = V_{y_n} + \frac{F_{y_n}\mathrm{d}\,t}{m}\,. \tag{6}$$

Dobijene vrednosti se u petlji uvrste u (3) i (4) i postupak se ponavlja. Ojlerova metoda je laka za razumevanje i jednostavna za programiranje, ali ne uzima u obzir priraštaj drugog reda koji nije zanemarljiv, tako da se greška tokom rada nagomilava. Javlja se lokalna greška, tj. greška najednom koraku i globalna greška, odnosno greška u fiksnoj tački.

M*odifikovana Ojlerova metoda*

Kod modifikovane Ojlerove metode prvo se određuje gruba aproksimacija funkcije $y_{i+1} = y_\mathrm{i} + hf_i$, a zatim računa $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$. Približna vrednost funkcije računa se kao:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f_i + f_{i+1}}{2}.$$

U slučaju dva tela nove koordinate računaju se po formulama:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{F_{x_n} \mathrm{d}\, t}{m} ,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{F_{y_n} \mathrm{d}\, t}{m} .$$

Za nalaženje brzine na kraju intervala koristi se približna vrednost koju daje Ojlerova metoda. Ova metoda delimično umanjuje grešku koja se javlja kod Ojlerove.

Metoda Runge-Kutta

Metoda Runge-Kutta, kao i prve dve, odvija se korak po korak. Na osnovu rezultata iz prethodne iteracije određuju se veličine u tekućoj iteraciji, tako da je dovoljno pokazati kako se vrši jedan korak.

Ova metoda za razliku od prve dve za jedan vremenski interval nalazi 4 tačke, umesto dve što drastično smanjuje grešku. Lokalna graška je zanemarljiva u odnosu na globalnu što se može izvesti, tako da greška je na kraju svakog intervala:

$$x_k \in \left[x_o, x_o + x \right]$$
$$\left| \text{greška} \, (y_k) \right| = \left| y \, (x_k) - y_k \right| .$$

Metoda Runge-Kutta primenjena na problem dva tela svodi se na rešavanje sistema četiri jednačine drugog reda koje se mogu svesti na osam jednačina prvog reda:

$$x_1' = V_{x_1} , \qquad V_{x_1} = \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot (x_2 - x_1)}{r_3}$$

$$y_1' = V_{y_1} , \qquad V_{y_1} = \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot (y_2 - y_1)}{r_3}$$

$$x_2' = V_{x_2} , \qquad V_{x_1} = \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot (x_1 - x_2)}{r_3}$$

$$y_2' = V_{y_2} , \qquad V_{y_1} = \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot (y_1 - y_2)}{r_3}$$

Rešenje ovih jednačina dobija na sledeći način. Neka je

$$y \, (x_n) = y_n ,$$
$$y' = f \, (x, y) .$$

Tada je:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4}{6} \quad ,$$

gde je:

$$k_1 = hf(x,y)\ ,$$

$$k_2 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2})\ ,$$

$$k_3 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2})\ ,$$

$$k_4 = hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_3}{2})\ .$$

U slučaju navedenih jednačina h je korak odnosno $\mathrm{d}\,t$ = const.

Problem tri tela

Određivanje kretanja tri tela složenije je od problema dva tela jer se uzima u obzir delovanje svih tela međusobno. Analitičko rešenje ovog problema moguće je izvesti samo za neke specijalne slučajeve i veoma je komplikovano jer putanje tela nemaju idealizovan geometrijski oblik elipse, kao što je to prethodni slučaj. Radi lakšeg rešavanja uvode se neka ograničenja:

1. Treća masa je mala u odnosu na prve dve, tako da ne utiče na njihovo kretanje.

2. Dve velike mase se kreću po kružnoj orbiti oko centra masa.

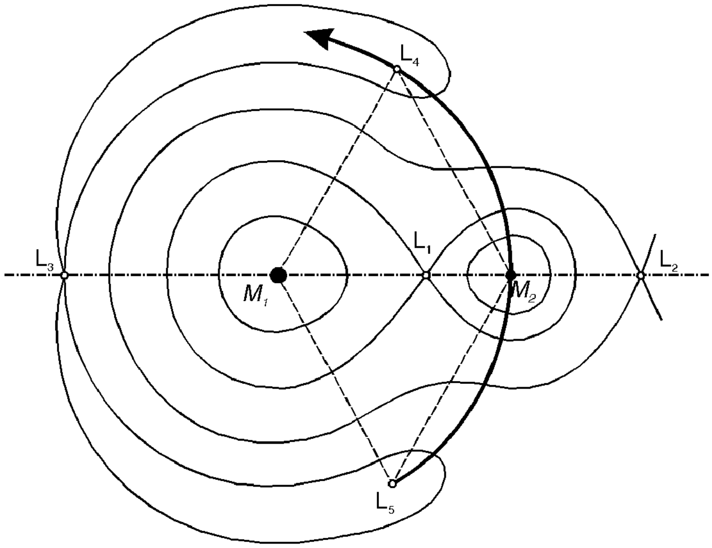
3. Kretanje se posmatra u koordinatnom sistemu koji rotira zajedno sa linijom koja spaja dva tela velikih masa.

Kada su samo prva dva uslova ispunjena problem se naziva „Ograničeni problem tri tela . Ovim problemom bavio se Lagranž, i uspeo da nađe neke pravilnosti.

Sva tri tela kreću se u istoj ravni i zadržvaju jedank razmeštaj samo onda ako se treće telo nalazi u području jedane od tačaka Ll, L2, L3, L4, L5, (Lagranžove tačke, koje je definisao krajem osamnaestog veka uz uslove 1, 2, 3 i da su početne brzine strogo određene). Tačke L4 i L5 nalaze se na vrhovima jednakostraničnog trougla (slika 1).

Takođe treće telo će se kretati po krivama na slici 1. koje predstavljaju mesta stalnog zbira gravitacijskog i centrifugalnog potencijala masa m_1 i m_2.

Numeričko rešavanje problema moguće je u svim slučajevima ukoliko ne dođe do sudara nekih od dvaju tela. Tada korišćene metode za slučaj dva tela ne daju dobra rešenja zbog velikog priraštaja brzine a s tim i porasta greške.



Slika 1.
Lagranževe tačke.

Figure 1.
The Lagrange points.

Metoda Runge-Kutta

Za problem tri tela pogodna je metoda Runge-Kutta zbog male greške pri računanju. Princip je isti kao i kod problema dva tela s tim što imamo 6 diferencijalnih jednačina drugog reda od kojih formiramo 12 jednačina prvog reda koje se mogu rešavati navedenom metodom.

$$y_i' = V_{x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$V_{x_1} = \gamma \cdot \left(m_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{r_1^3} + m_3 \cdot \frac{x_3 - x_1}{r_3^3} \right),$$

$$V_{y_1} = \gamma \cdot \left(m_2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{r_1^3} + m_3 \cdot \frac{y_3 - y_1}{r_3^3} \right),$$

$$V_{x_2} = \gamma \cdot \left(m_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{r_1^3} + m_3 \cdot \frac{x_3 - x_2}{r_2^3} \right),$$

$$V_{y_2} = \gamma \cdot \left(m_1 \cdot \frac{y_1 - y_1}{r_2^3} + m_3 \cdot \frac{y_3 - y_2}{r_3^3} \right),$$

$$V_{x_3} = \gamma \cdot \left(m_1 \cdot \frac{x_1 - x_3}{r_3^3} + m_2 \cdot \frac{x_2 - x_3}{r_2^3} \right),$$

$$V_{y_3} = \gamma \cdot \left(m_1 \cdot \frac{y_1 - y_3}{r_3^3} + m_2 \cdot \frac{y_2 - y_3}{r_2^3} \right).$$

Ove jednačine rešavaju se po algoritmu Runge-Kutta, prikazanom kod problema dva tela.

Skaliranje i vezivanje centra masa za koordinatni početak

Da bi programi davali grafički prikaz vrednosti realnih koordinata, treba ih skalirati određenim brojem kako bi se one umanjile i smestile na ekran 640×480 piksela, što predstavlja skaliranje. Broj kojim se deli zavisi od početnih uslova, a u primerima koji su rađeni taj broj iznosi 10^9. Da čitav sistem ne bi „odlepršao sa ekrana treba ga vezati za koordinatni početak tj. od koordinata treba oduzeti koordinate centra masa ($x - x_{cm}$, $y - y_{cm}$). Za koordinatni početak uzimamo centar ekrana (320, 240).

Problem velikih brzina

I pored velike preciznosti Runge-Kutta algoritma lokalna greška može da poraste preko dozvoljene vrednosti. To se dešava kada brzine dva tela postanu isuviše velike. Tada u svakoj iteraciji koordinate dobijaju veliki priraštaj. Dakle, za vremenski interval $\mathrm{d}\,t$ = const. telo prelazi *isuviše* velika rastojanja što povećava grešku.

Ovo *isuviše* iz predhodne rečenice je broj koji je uzet iz programa za problem dva tela (Runge-Kutta) kao najveći priraštaj tela mase m_2 za ulazne veličine:

$m_1 = 1.96 \cdot 10^{30}$ kg	$m_2 = 5.97 \cdot 10^{26}$ kg
$x_1 = 0$ m	$x_2 = 0$ m
$y_1 = 0$ m	$y_2 = 0$ m
$V_{x_1} = 0$ m/s	$V_{x_2} = 0$ m/s
$V_{y_1} = 0$ m/s	$V_{y_2} = 1.9 \cdot 10^4$ m/s

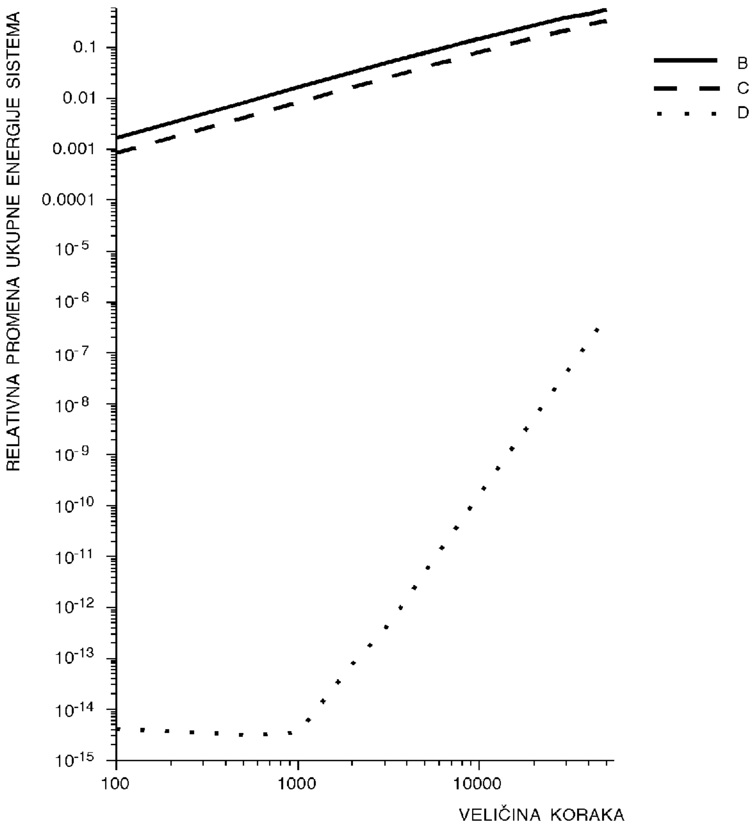
i iznosi $4 \cdot 10^8$ m. Ovaj broj moze biti različit za različite početne uslove i može da se bira proizvoljno.

Kada priraštaj pređe $4 \cdot 10^8$ ili $-4 \cdot 10^8$ korak (vremenski interval) se polovi i računa se sve ispočetka za taj novi interval. U programu se ovo rešava jednim kontrolnim Bulovim iskazom i rekurzijom. Kad priraštaj opadne ispod utvrđenih vrednosti, on se dodaje koordinatama, koraku dt se dodjeljuje početna vrednost i sve se ponavlja.

Tako program radi za bilo koju veličinu koraka ($10^1 \ldots 10^{39} \ldots$) sa manjom greškom nego sa malim intervalima (do 10^4) prije ove ispravke.

Rezultati i diskusija

Programi napisani za rešavanje problema kretanja dva tela koristeći tri predhodno navedene numeričke metode iskorišćeni su za upoređivanje efikasnosti tih metoda. Urađena su dva testa: test tačnosti i test brzina.



Slika 2.
Zavisnost relativne promene ukupne energije sistema od veličine koraka.
B – Ojlerova metoda
C – modifikovana Ojlerova metoda
D – metoda Runge-Kuta

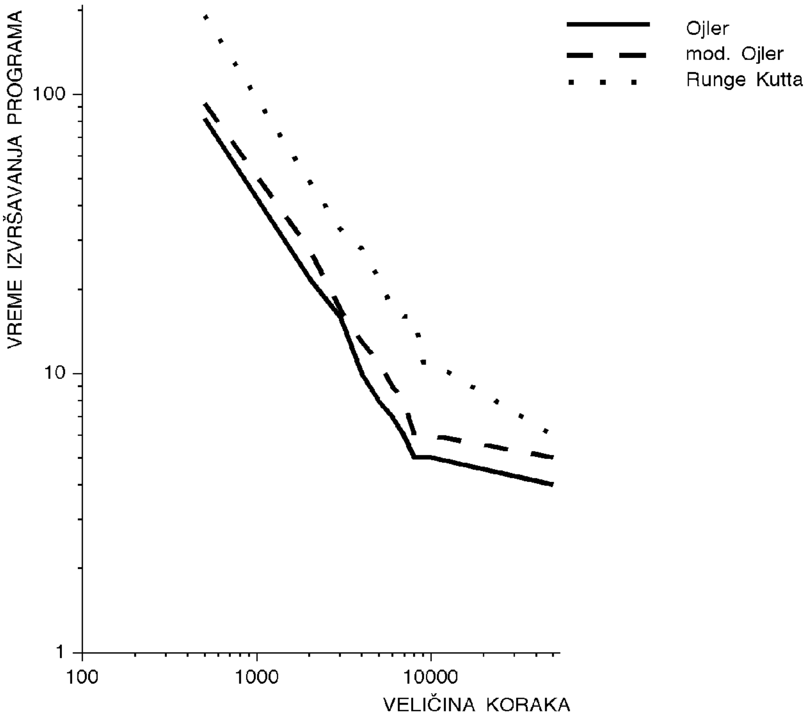
Figure 2.
Change of relative energy as a function of step size, calculated by different methods.

Najlakši način za proveru tačnosti je određivanje greške kod svake od metoda. Meri se relativno odstupanje ukupne energije sistema na kraju nekog intervala od početne. Na osnovu rezultata merenja crtamo grafik.

Grafik na slici 2 prikazuje zavisnost relativne promene ukupne energije sistem od koraka h po „log-log skali. Sa grafika se vidi da metoda Runge-Kutta na koraku h = 1000 ima grešku za oko 12 redova veličine manju od Ojlerove i modifikovane Ojlerove metode dok je greška na većim koracima (h = 50000) manja za 8 redova veličine. Ojlerova i modifikovana Ojlerova metoda imaju grešku čija je razlika jedan red veličine. Rezultati testa greške pokazali su preciznost metode Runge-Kutta i potvrdili da je to efikasna metoda za numeričke analize.

Kod testa brzine mereno je vreme izvršavanja programa. Ispitane su sve tri metode uz iste početne uslove i posle jednakog broj koraka. Grafik na slici 3 prikazuje zavisnost vremena izvršavanja programa od veličine koraka. Zavisnost je prikazana na „log-log skali. Na osnovu grafika zaključujemo da je brzina izvršavanja programa sa metodom Runge-Kutta manja od ostale dve metode, ali je ta razlika zanemarljiva.

Inače, iz poznatih numeričkih rešenja kretanja može se takođe izvesti i približno analitičko rešenje.



Slika 3.
Zavisnost vremena izvršavanja programa od koraka.

Figure 3.
The dependence of the program execution time on the length of steps.

Literatura

[1] Milanković, M. 1988. *Osnovi nebeske mehanike*. Beograd: Naučna knjiga

[2] Schmid, E. W., Spitz, G., Lsch, W. 1990. *Theoretical Physics on the Personal Computer*. Springer-Verlag

[3] Božinović, M. 1995. *Numeričke metode*. Nikšić: Unireks

Ivana Jovanović and Vuk Gojnić

Numerical approach to two- and three body problems

Two and three body problems were treated numerically on a personal computer. The program for the simulation was written in Turbo Pascal, using Euler s, modified Euler s and Runge-Kutta methods. The efficiency of the methods was compared.